

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

THÈSE PRÉSENTÉE À
L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À TROIS-RIVIÈRES
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU DOCTORAT EN INGÉNIERIE
OFFERT EN EXTENSION
EN VERTU D'UN PROTOCOLE D'ENTENTE
AVEC L'UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À CHICOUTIMI

PAR
Paul Alexandre Nana Takougoum

ADAPTATION ET TRANSFORMATION AUTOMATIQUES DES
RÉSULTATS D'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE EN MODÈLES CAO DE
STRUCTURES DE POUTRES

MARS 2018

Université du Québec à Trois-Rivières

Service de la bibliothèque

Avertissement

L'auteur de ce mémoire ou de cette thèse a autorisé l'Université du Québec à Trois-Rivières à diffuser, à des fins non lucratives, une copie de son mémoire ou de sa thèse.

Cette diffusion n'entraîne pas une renonciation de la part de l'auteur à ses droits de propriété intellectuelle, incluant le droit d'auteur, sur ce mémoire ou cette thèse. Notamment, la reproduction ou la publication de la totalité ou d'une partie importante de ce mémoire ou de cette thèse requiert son autorisation.

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC

DOCTORAT EN INGÉNIERIE (Ph. D.)

Programme offert par l'Université du Québec à Chicoutimi (UQAC)

en extension avec

l'Université du Québec à Trois-Rivières (UQTR)

Cette thèse a été dirigée par :

Jean-Christophe Cuillière, directeur de recherche, PhD Université du Québec à Trois-Rivières

Vincent François, codirecteur de recherche, PhD Université du Québec à Trois-Rivières

Jury d'évaluation de la thèse :

Jean-Christophe Cuillière, directeur de recherche, PhD Université du Québec à Trois-Rivières

Vincent François, codirecteur de recherche, PhD Université du Québec à Trois-Rivières

Lotfi Toubal, PhD Université du Québec à Trois-Rivières

Roland Maranzana, PhD École de Technologie Supérieure de Montréal

Jean-Marc Drouet, PhD Université de Sherbrooke

François Guibault, PhD École Polytechnique de Montréal

Thèse soutenue le 22 03 2018

DÉDICACE

Dédicace spéciale à Toi,
Esprit-Saint, Esprit du Dieu vivant !

À ma famille
À papa, maman, Sandrine, Bénédicte, Éléonore et Merveilles
À Gervie

REMERCIEMENTS

Non pas à moi, Éternel, non pas à moi, mais à Ton nom donne gloire, à cause de Ta bonté, à cause de Ta fidélité (Psaume 115:1), mais surtout parce que Tu as tant aimé le monde que Tu as donné Ton Fils unique Jésus-Christ afin que quiconque croit en Lui ne périsse point, mais qu'il ait la vie éternelle (Jean 3:16). Il est venu chez les siens, et les siens ne l'ont point reçu. Mais à tous ceux qui L'ont reçu, à ceux qui croient en Son nom, Il a donné le pouvoir de devenir enfants de Dieu, lesquels sont nés, non du sang, ni de la volonté de la chair, ni de la volonté de l'homme, mais de Dieu (Jean 1:11-13). Aujourd'hui, si vous entendez sa voix, n'endurcissez pas vos cœurs (Hé 4:7). Ainsi donc, À celui qui peut me préserver de toute chute et me faire paraître devant Sa gloire irrépréhensible et dans l'allégresse, à Dieu seul, mon Sauveur, par Jésus-Christ mon Seigneur, soient gloire, majesté, force et puissance, dès avant tous les temps, et maintenant, et dans tous les siècles ! Amen ! (Jude 24-25).

J'aimerais tout d'abord remercier les professeurs Jean-Christophe Cuillière et Vincent François pour m'avoir accueilli dans l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul (ÉRICCA) et m'avoir proposé ce sujet de recherche. Voyez en ces quelques mots l'expression de ma profonde gratitude.

Cette thèse n'aurait pas la même dimension s'ils ne me faisaient l'honneur de la lire. Membres du jury, je vous remercie d'ores et déjà pour les enseignements que vous m'apporterez par vos critiques et questions, ainsi que pour le temps que vous n'avez pas hésité à me consacrer.

Pour finir, je rends grâce à mon Père Céleste, dans le nom de Jésus-Christ Son fils, mon Sauveur et mon Rédempteur, pour toutes les personnes et organismes qu'Il a mis sur mon chemin et qui ont contribué d'une façon quelconque à l'aboutissement de ce travail. Soyez bénis abondamment !

La crainte de l'éternel est le commencement de la science (Proverbes 1:7).

RÉSUMÉ

Les méthodes d'optimisation topologique sont de nos jours très populaires et intégrées dans plusieurs logiciels de conception. Elles munissent le concepteur d'un outil de choix pour l'obtention des formes optimisées en phase de conception. Cependant, l'une des principales limites de ces méthodes est l'interprétation du résultat de l'optimisation en un modèle facilement exploitable dans la suite du processus de conception. En effet, seulement un nombre limité d'approches ont été développées en vue de transformer un modèle optimisé en un modèle de CAO (Conception Assistée par Ordinateur). Bien qu'elles soient probantes à bien des égards, elles sont pour la plupart encore limitées aux modèles en 2D et sont semi ou non automatiques, ce qui fait que le concepteur est beaucoup mis à contribution durant l'interprétation du modèle optimisé. Dans cette recherche, une méthodologie d'interprétation d'un résultat d'optimisation topologique est proposée. La méthode d'optimisation utilisée est la méthode SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) qui donne comme résultat une répartition optimale de la matière dans le modèle. En considérant un résultat de la méthode SIMP qui s'oriente vers des structures composées de poutres, l'approche proposée compte deux étapes importantes que sont l'amélioration de la qualité du résultat de l'optimisation et la conversion en modèle CAO du modèle optimisé adapté qui en découle. Le produit est donc un modèle CAO plus facile à exploiter et à fabriquer. Ce dernier est finalement validé par une analyse multidimensionnelle par éléments finis. En plus d'être automatique, l'approche développée retourne des modèles CAO qui représentent bien la forme telle qu'optimisée.

ABSTRACT

Nowadays, topology optimization methods are very popular and integrated into several computer-aided design (CAD) software. They provide the designer with a tool allowing to obtain optimized shapes in the design phase. However, one of the main limitations of these methods is the interpretation of optimization results into CAD models that can be easily used in subsequent design phases. Indeed, only a limited number of approaches have been developed in order to interpret raw optimization results into CAD models. Even if good results can be obtained with some of these methods, it is still limited to 2D models and these methods are semi- or non-automatic. Consequently, the interpretation process requires the designer's intervention. In this work, a methodology for automatically interpreting three-dimensional topology optimization result into CAD models is proposed. The optimization method used is the SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) method, which results in an optimized distribution of material inside a given volume. Considering results of the SIMP method that tend towards beam-like structures, the proposed approach involves two main stages, which are quality improvement of the optimized result and conversion of the improved optimized shape into a CAD model of beam structure. Therefore, the outcome of this approach is a CAD model that is easier to use and to manufacture. The converted model is finally validated through a multidimensional finite element analysis (FEA). More than being fully automatic, the proposed method also produces CAD models that are good approximations of optimized shapes generated by the SIMP method.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	III
REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ	V
ABSTRACT	VI
TABLE DES MATIÈRES	VII
LISTE DES TABLEAUX.....	XIII
LISTE DES FIGURES.....	XV
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XXVI
CHAPITRE 1 INTRODUCTION	1
1.1 Contexte	1
1.2 Problématique	3
1.3 Objectifs	4
1.4 Contributions.....	5
1.5 Organisation de la thèse	6
CHAPITRE 2 ÉTAT DES CONNAISSANCES.....	8
2.1 Introduction	8
2.2 Optimisation de formes	10
2.3 Optimisation topologique.....	11
2.3.1 Méthodes d'homogénéisation	12
2.3.2 Méthodes évolutionnaires	13
2.3.3 Méthodes Level-set	15

2.3.4	Méthode SIMP	16
2.4	Interprétation des résultats d'optimisation topologique	18
2.4.1	Interprétation par découpage isovaleur	18
2.4.1.1	Interprétation par extraction d'isocontours	19
2.4.1.2	Interprétation par extraction d'isosurfaces	20
2.4.2	Interprétation à l'aide de sections transversales	23
2.4.3	Interprétation par approximation géométrique	24
2.5	Reconstruction de modèles en ingénierie inverse	29
2.6	Logiciels d'optimisation topologique	32
2.7	Vers une nouvelle méthode d'interprétation	35
2.7.1	Limites des méthodes d'interprétation actuelles	36
2.7.2	Méthodologie proposée	37
2.8	Présentation des outils de la méthodologie	40
2.8.1	Méthodes de raffinement de maillage	41
2.8.2	Méthodes de lissage	50
2.8.3	Méthodes de squelettisation	55
2.9	Conclusion	63
CHAPITRE 3	OPTIMISATION TOPOLOGIQUE ADAPTATIVE	64
3.1	Introduction	64
3.2	Hypothèses	64
3.3	Méthode SIMP	64
3.3.1	Modélisation et conditions mécaniques	66
3.3.2	Subdivision en sous-domaines de design et de non-design	67

3.3.3	Maillage.....	67
3.3.4	Formulation du problème comme une distribution de matière	69
3.3.5	Critère d'optimalité	72
3.3.6	Filtrage de la sensibilité de la compliance et de la densité	75
3.3.7	Résultats de la méthode SIMP	82
3.3.8	Vers l'interprétation des résultats de la méthode SIMP	83
3.4	Méthode SIMP adaptative.....	84
3.4.1	Principe de l'adaptation.....	86
3.4.2	Détermination des zones d'intérêt.....	88
3.4.3	Fonction d'adaptation du maillage.....	90
3.4.4	Paramètres de la fonction d'adaptation	93
3.4.5	Adaptation du filtrage de la densité	96
3.4.6	Critère d'arrêt de la méthode SIMP adaptative	98
3.4.7	Résultats de la méthode SIMP adaptative	98
3.4.7.1	Effet du paramètre de raffinement χ	103
3.4.7.2	Effet du paramètre de déraffinement Enm	106
3.4.7.3	Effet du nombre de couches.....	110
3.5	Récapitulatif des résultats	111
3.6	Conclusion	115
CHAPITRE 4 TRANSFORMATION EN UNE STRUCTURE DE POUTRES DROITES		117
4.1	Introduction	117
4.2	Hypothèses	118

4.3	Principe de la transformation	118
4.4	Conversion du modèle optimisé adapté	120
4.4.1	Extraction de l'enveloppe de la forme optimisée adaptée	120
4.4.2	Lissage de l'enveloppe	124
4.4.3	Squelettisation	126
4.4.3.1	Principe de courbe-squelettisation	126
4.4.3.2	Contraction de l'enveloppe de la forme adaptée	127
4.4.3.3	Création des points squelettiques	130
4.4.3.4	Connexion des points squelettiques	131
4.4.3.5	Élagage des triangles	132
4.4.4	Calcul du rayon des sections	133
4.4.5	Normalisation	136
4.4.6	Modèle CAO	140
4.5	Validation du modèle converti	141
4.5.1	Modèle 1D-3D	142
4.5.2	Raccordement du squelette (1D) au volume (3D)	142
4.5.3	Maillage du modèle converti	147
4.5.4	Résultats de l'étude multidimensionnelle	148
4.5.4.1	Résultats avec le raccordement par nœuds	149
4.5.4.2	Résultats avec le raccordement par triangles	153
4.6	Récapitulatif des résultats	157
4.7	Conclusion	160
CHAPITRE 5	RÉSULTATS ET DISCUSSION	162
5.1	Introduction	162

5.2	Description de l'environnement de développement.....	162
5.3	Cas d'étude 1 : Support en forme de L	163
5.3.1	Résultats de la méthode SIMP adaptative	163
5.3.2	Résultats de la conversion.....	168
5.3.3	Analyse des résultats	173
5.4	Cas d'étude 2 : Pont	175
5.4.1	Résultats de la méthode SIMP adaptative.....	175
5.4.2	Résultats de la conversion.....	179
5.4.3	Analyse des résultats	184
5.5	Cas d'étude 3 : Chaise.....	185
5.5.1	Résultats de la méthode SIMP adaptative.....	185
5.5.2	Résultats de la conversion.....	190
5.5.3	Analyse des résultats	195
5.6	Discussion générale.....	196
5.7	Conclusion	201
CHAPITRE 6	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	202
6.1	Perspectives d'applications	204
6.1.1	Boucles d'adaptation de la fraction volumique.....	204
6.1.2	Enveloppe de la forme optimisée extraite par isodensité.....	208
6.1.3	Autres applications potentielles	209
6.1.3.1	Utilisation d'autres méthodes d'optimisation topologique	209
6.1.3.2	Utilisation d'autres types de fonction	209
6.1.3.3	Utilisation d'autres types de profilés.....	210

6.2	Perspectives d'amélioration	210
6.2.1	Critère de choix des paramètres de l'adaptation	210
6.2.2	Critère de convergence et gradient de taille	211
6.2.3	Autres processus d'adaptation.....	211
6.2.3.1	Remaillage partiel du modèle	212
6.2.3.2	Projection du résultat de l'optimisation	212
6.2.3.3	Contrainte sur la prescription de tailles.....	213
6.2.4	Post-traitement du squelette.....	213
6.2.5	Mini-poutres uniquement dans le cercle de l'interface	214
6.2.6	Lissage adapté à l'optimisation topologique.....	215
6.2.7	Squelettisation adaptée à l'optimisation topologique	215
6.2.8	Importation du modèle converti dans un logiciel de CAO	216
6.2.9	Conversion en modèles CAO des modèles optimisés volumiques	216
	LISTE DES CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES.....	218
	BIBLIOGRAPHIE	220

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 3-1 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP.	81
Tableau 3-2 : Synthèse des paramètres de l'adaptation.	99
Tableau 3-3 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-23.....	101
Tableau 3-4 : Synthèse des résultats lors de l'implémentation de la SIMP adaptative..	101
Tableau 3-5 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec diminution du paramètre de raffinement.....	103
Tableau 3-6 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-24.....	104
Tableau 3-7 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec augmentation du paramètre de raffinement.....	105
Tableau 3-8 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-25.....	105
Tableau 3-9 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec augmentation du paramètre de déraffinement <i>Enm</i>	107
Tableau 3-10 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-26.....	108
Tableau 3-11 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec diminution du paramètre de déraffinement <i>Enm</i>	108
Tableau 3-12 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-27.....	110
Tableau 3-13 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec filtrage à 2 couches.	110
Tableau 3-14 : Récapitulatif des résultats de la méthode SIMP adaptative appliquée avec $dg = 250mm$	112
Tableau 4-1 : Récapitulatif des résultats du modèle avant et après conversion.....	157
Tableau 5-1 : Exemple 1 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.	164

Tableau 5-2 : Exemple 1 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.....	166
Tableau 5-3 : Exemple 1 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.	173
Tableau 5-4 : Exemple 2 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.	176
Tableau 5-5 : Exemple 2 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.....	176
Tableau 5-6 : Exemple 2 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.	183
Tableau 5-7 : Exemple 3 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.	186
Tableau 5-8 : Exemple 3 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.....	187
Tableau 5-9 : Exemple 3 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.	195
Tableau 5-10 : Tableau récapitulatif des résultats des modèles adaptés convertis.	197
Tableau 6-1 : Tableau des résultats de la boucle d'adaptation volumique.	206

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1 : Processus de conception par essai-erreur.....	8
Figure 2-2 : Processus de conception par optimisation de formes.....	9
Figure 2-3 : Familles d'optimisation de formes (tirée de Bendsoe et <i>al.</i> [1]).....	11
Figure 2-4 : Résultat de la méthode d'homogénéisation (tirée de Allaire et <i>al.</i> [28]).	12
Figure 2-5 : (a) Problème d'optimisation, (b)-(c) les modèles optimisés par la méthode BESO (tirée de Young et <i>al.</i> [31]).	14
Figure 2-6 : Optimisation topologique par la méthode <i>level-set</i> avec 2 topologies initiales différentes (tirée de Allaire et <i>al.</i> [25]).	16
Figure 2-7 : Optimisation topologique par la méthode SIMP. (a) Problème d'optimisation et (b) illustration de l'effet damier. Modèle optimisé avec (c) 600 et (d) 5400 éléments (tirée de Sigmund et <i>al.</i> [36]).	17
Figure 2-8 : (a) Problème, (b) Optimisation, sections et isocontours, (c) Modèle solide (tirée de Hsu et <i>al.</i> [27]).	20
Figure 2-9 : Exemple d'intersection isosurface-tétraèdre : (a) 1 triangle, (b) 2 triangles.	21
Figure 2-10 : (a) Problème (b) Optimisation (c) Isosurfaces à $\rho = 0,84$ (d) Modèle solide (tirée de Koguchi et <i>al.</i> [37]).	21
Figure 2-11 : Problème d'optimisation et solution sous forme d'isosurfaces (tirée de Victoria et <i>al.</i> [39]).	22
Figure 2-12 : (a) Problème d'optimisation (b) optimisation et plan des sections (c) profils (d) <i>B-Splines</i> (e) modèle final (tirée de Chang et <i>al.</i> [48]).	24
Figure 2-13 : Cartes polaires de quelques primitives (tirée de Lin et <i>al.</i> [50]).	25
Figure 2-14 : Critère de choix d'une primitive (tirée de Blattman et <i>al.</i> [51]).	25

Figure 2-15 : Interprétation d'un résultat d'optimisation par des primitives (tirée de Larsen et al. [49]).....	27
Figure 2-16 : Interprétation d'un modèle optimisé à l'aide du squelette. (a) Problème initial, (b) solution optimisée, (c) squelette (axe médian) et (d) modèle reconstruit avec 8 bars (tirée de Bremicker et al. [7]).....	29
Figure 2-17 : (a) Nuage de points du modèle, (b) triangulation, (c) segmentation (d) correspondance des surfaces et (e) modèle reconstruit (tirée de Wang et al. [55]).	30
Figure 2-18 : Reconstruction d'un élément aérodynamique (<i>AirFoil body</i>). (a) Génération du maillage à partir du nuage de points du scan, (b) profil des sections et (c) balayage (tirée de Goyal et al. [59]).....	31
Figure 2-19 : Reconstruction d'un modèle avec les primitives plans et cylindres. (a) Maillage 3D, (b) extraction des primitives géométriques (6 cylindres et 16 plans), (c) reconstruction et (d) modèle final obtenu (tirée de Bènière et al. [61]).....	32
Figure 2-20 : Illustration des contraintes de fabrication (tirée de [69]).	33
Figure 2-21 : Optimisation topologique à l'aide du logiciel TOSCA (tirée de Saleem et al. [64]).....	34
Figure 2-22 : Primitives et exemple de raffinement (tirée de Allinger [71]).	35
Figure 2-23 : Schéma du processus actuel de conception par la méthode SIMP.....	36
Figure 2-24 : Principe général de l'approche d'interprétation développée.....	38
Figure 2-25 : Schéma du principe de la méthode SIMP adaptative.....	39
Figure 2-26 : Schéma du principe de la conversion et de validation.	40
Figure 2-27 : Optimisation topologique avec raffinement (tirée de Maute et al. [40]).	43
Figure 2-28 : Éléments de transition (à gauche) et cycles d'optimisation (à droite) (tirée de Costa et al. [75]).....	44

Figure 2-29 : (a) Problème initial, (b) solution grossière, (c) identification de la zone à raffiner et (d) raffinement d'une poutre cantilever (tirée de Stainko [77]).	44
Figure 2-30 : (a) Problème initial, (b) solution grossière, (c)-(e) étapes de raffinement et déraffinement (tirée de Wang et <i>al.</i> [79]).	45
Figure 2-31 : (A) Problème initial, (1)-(4) étapes de raffinement et d'optimisation, et (5) maillage du résultat final (tirée de Bruggi et <i>al.</i> [80]).	46
Figure 2-32 : Éléments de la zone de transition et de raffinement (tirée de Wang et <i>al.</i> [81]).	47
Figure 2-33 : (a) Maillage initial et résultat sans raffinement ; optimisation après (b) 1 ^{er} , (c) 2 ^e et (d) 3 ^e niveau de raffinement (tirée de Wang et <i>al.</i> [81]).	47
Figure 2-34 : (a) Problème d'optimisation, (b) résultat de la première optimisation, (c) projection sur un maillage raffiné et (d) modèle initial de la deuxième optimisation (tirée de Lin et <i>al.</i> [83]).	48
Figure 2-35 : (a) Problème initial et (b) résultat de l'optimisation avec raffinement (tirée de Aremu et <i>al.</i> [84]).	49
Figure 2-36 : Résultat optimisé de l'écoulement de fluide avec raffinement de maillage autour de la forme optimisée du conduit (tirée de Duan et <i>al.</i> [85]).	49
Figure 2-37 : Illustration du principe du lissage <i>Laplacien</i> .	51
Figure 2-38 : Lissage de maillage : (a) isosurface à facettes, puis lissage (b) <i>Gaussien</i> et (c) <i>Taubin</i> (tirée de Taubin [88]).	52
Figure 2-39 : (a) Modèle initial, (b) modèle avec 0,7 % de bruit Gaussien, puis lissage avec la méthode de (c) [96], (d) [99] et (e) [97] (tirée de Chen et <i>al.</i> [97]).	53
Figure 2-40 : Enveloppe du modèle optimisé (a) à la fin de la SIMP et après 20 itérations du lissage, (b) <i>Laplacien</i> et (c) de Chen et <i>al.</i> [98].	54
Figure 2-41 : Type de points d'un squelette (tirée de Palágyi [102]).	55

Figure 2-42 : (a) Points initiaux et (b) diagramme de Voronoï (tirée de Palágyi [102]).	56
Figure 2-43 : (a) Frontière d'un rectangle approximé avec un ensemble de points et (b) squelette comme une partie du diagramme de Voronoï (tirée de Palágyi [102]).	57
Figure 2-44 : Illustration d'un squelette (en noir) par amincissement (tirée de Palágyi [102]).	58
Figure 2-45 : (a) Image binaire initiale et (b) carte de distance (tirée de Palágyi [102]).	59
Figure 2-46 : Squelettisation. (a) Main bruitée, (b) surface médiane avec les valeurs de la fonction géodésique moyenne et (c) la courbe-squelette (tirée de Dey et <i>al.</i> [112]).	60
Figure 2-47 : Étapes d'advection pour l'extraction de la courbe-squelette : (a) à (d) surfaces médianes et (e) rendu de la courbe-squelette (tirée de Telea et <i>al.</i> [114]).	61
Figure 2-48 : (a) Nuage de points initial. Courbe-squelette d'après (b) Au et <i>al.</i> [104] et (c) Cao et <i>al.</i> [105] (tirée de Cao et <i>al.</i> [105]).	61
Figure 2-49 : Principe de squelettisation. (a) Nuage de points en entrée et jointure en bleu. Obtention du squelette après (b) contraction par <i>Laplacien</i> et (c) érosion du nuage de points ; les branches du squelette en vert et la jointure en bleu. (d) Nuage de points recentré et (e) squelette 1D final (tirée de Tagliasacchi et <i>al.</i> [115]).	62
Figure 3-1 : Schéma du processus d'optimisation par la méthode SIMP.	65
Figure 3-2 : Illustration d'un problème d'optimisation avec le modèle <i>cas test</i> .	66
Figure 3-3 : Illustration de la subdivision du modèle <i>cas test</i> en sous-domaines de <i>design</i> (en bleu) et de <i>non-design</i> (en rouge), avec un maillage uniforme ($dg = 250mm$).	69
Figure 3-4 : Effet du coefficient de pénalisation p .	70
Figure 3-5 : Effet du coefficient de pénalisation p sur un résultat d'optimisation.	71
Figure 3-6 : Illustration de l'effet damier sur un résultat d'optimisation topologique.	76

Figure 3-7 : Représentation des éléments pris en compte lors du filtrage.	78
Figure 3-8 : Distribution optimale de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP en fonction de différentes valeurs du rayon de filtrage de la sensibilité de la compliance.	78
Figure 3-9 : Répartition de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP en fonction de différentes valeurs du rayon de filtrage de la densité.	80
Figure 3-10 : Comparatif des différents filtrages. Résultats de la méthode SIMP avec (a) aucun filtrage, (b) filtrage de la sensibilité de la compliance, (c) filtrage de la densité et (d) filtrage de la sensibilité de la compliance et de la densité.	82
Figure 3-11 : (a) Résultat de la méthode SIMP, (b) et (c) les coupes longitudinales de (a), ainsi que les formes optimisées pour $\rho_{seuil} =$ (d) 0,1, (e) 0,4 et (f) 0,8.	83
Figure 3-12 : Évolution de la compliance finale et de la distribution optimale de la densité en fonction de la taille du maillage.	85
Figure 3-13 : Algorithme de la SIMP adaptative.	87
Figure 3-14 : Répartition (a) de la densité à la fin de la SIMP et (b) de la norme du gradient de densité.	89
Figure 3-15 : Évolution du gradient maximal de densité avec la taille du maillage.	92
Figure 3-16 : Évolution de la taille du maillage en fonction de χ pour Enm fixé.	94
Figure 3-17 : Évolution de la taille du maillage en fonction de Enm pour χ fixé.	95
Figure 3-18 : Éléments pris en compte lors du filtrage d'un maillage (a) uniforme et (b) adapté.	97
Figure 3-19 : Illustration de l'effet du rayon de filtrage isotrope. Répartitions optimales de la densité à la fin de la SIMP sur (a) le maillage uniforme initial et après (b) la 1 ^{re} et (c) la 2 ^e adaptation du maillage (tirée de Nana et al. [15]).	97
Figure 3-20 : Illustration des éléments pris en compte lors du filtrage adapté.	98

Figure 3-21 : 1 ^{re} adaptation : (a) gradient de densité, tailles (b) prescrites, (c) réelles et (d) erreur dans le respect de la taille prescrite.	99
Figure 3-22 : 2 ^e adaptation : (a) gradient de densité, tailles (b) prescrites, (c) réelles et (d) erreur dans le respect de la taille prescrite.	100
Figure 3-23 : Résultats de la méthode SIMP adaptative du modèle <i>cas test</i> avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-2.....	102
Figure 3-24 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-5.....	104
Figure 3-25 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation sont résumés dans le Tableau 3-7.....	106
Figure 3-26 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-9.....	107
Figure 3-27 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-11.....	109
Figure 3-28 : Optimisation topologique par la méthode SIMP avec filtrage à 2 couches et les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-13.	111
Figure 3-29 : Évolution de la compliance à la fin de la méthode SIMP adaptative en fonction de Enm (pour $\chi = 1,75$) et χ (pour $Enm = 400mm$).	113
Figure 3-30 : Illustration des répartitions de la densité à la fin de la méthode SIMP adaptative pour les cas (a) <i>Ref.</i> , (b) (II), et (c) (III).....	114
Figure 3-31 : Illustration (a) du modèle CAO initial et (b) du résultat de la méthode SIMP adaptative développée du cas <i>Ref.</i>	116
Figure 4-1 : Illustration d'un résultat d'optimisation tendant vers des structures (a) composées de poutres et (b) volumiques.	117
Figure 4-2 : Principe de la transformation en une structure de poutres.	119

Figure 4-3 : Illustration d'un cas de <i>non manifold</i> (a) par nœud, (c) par arête, puis réactivation des éléments voisins (b) au nœud et (d) à l'arête problématiques (tirée de Picher-Martel [11]).	122
Figure 4-4 : (a) Résultat de la méthode SIMP adaptative (Figure 3-23), (b) forme optimisée adaptée pour $\rho_{seuil} = 0,30$ et (c) enveloppe de la forme optimisée adaptée.	123
Figure 4-5 : Illustration de la méthode de lissage utilisée [95].	124
Figure 4-6 : Enveloppe de la forme optimisée adaptée (a) avant et (b) après lissage.	126
Figure 4-7 : Principe de courbe-squelettisation [105].	127
Figure 4-8 : Illustration des angles opposés à l'arête (p_i, p_j) qui est dans le premier anneau de voisinage du point p_i (inspirée de Desbrun et al. [89]).	128
Figure 4-9 : Nuage de points de l'enveloppe avant et après contraction.	129
Figure 4-10 : Illustration de la création des points squelettiques.	130
Figure 4-11 : Connexion des points squelettiques (en blanc) avec des segments (en noir) et zoom des triangles à élaguer.	131
Figure 4-12 : Illustration des segments de la courbe-squelette après élagage.	133
Figure 4-13 : Nuage de points et courbe-squelette.	133
Figure 4-14 : Algorithme du calcul du rayon de section.	134
Figure 4-15 : Illustration du principe de calcul du rayon de section.	135
Figure 4-16 : Répartition du rayon de la section transversale de chaque segment de poutre de la courbe-squelette (en m).	136
Figure 4-17 : Principe de la normalisation.	138
Figure 4-18 : Illustration de 3 branches d'une courbe-squelette (a) avant et (b) après normalisation, avec un point d'extrémité (en vert) et un point de jonction (en jaune) (tirée de Nana et al. [16]).	139

Figure 4-19 : Répartition du rayon de la section transversale de chaque poutre normalisée (en m).....	139
Figure 4-20 : Modèle CAO obtenu à partir de la Figure 4-4c. Partie convertie en gris et partie de <i>non-design</i> en rouge.	141
Figure 4-21 : Modèle 1D-3D.	142
Figure 4-22 : Illustration de l'ajout de mini-poutres (inspirée de [134]).	143
Figure 4-23 : Principe du raccordement 1D-3D.....	144
Figure 4-24 : Illustration du <i>raccordement par nœuds</i> avec les mini-poutres.	146
Figure 4-25 : Illustration du <i>raccordement par triangles</i> avec les mini-poutres.	146
Figure 4-26 : Modèle 1D-3D de calcul.	147
Figure 4-27 : Répartition de l'énergie de déformation par élément 1D et 3D avec raccordement par nœuds (Figure 4-24).	150
Figure 4-28 : (a) Norme du vecteur déplacement (en mm) et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) de la structure, avec raccordement par nœuds.....	150
Figure 4-29 : Répartition des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres avec raccordement par nœuds.	151
Figure 4-30 : Répartition des contraintes de cisaillement (a) τ_{xy} et (b) τ_{xz} dans les poutres avec raccordement par nœuds.	152
Figure 4-31 : Répartition de la contrainte de Von Mises dans le volume avec raccordement par nœuds.	153
Figure 4-32 : Répartition de l'énergie de déformation par élément 1D et 3D avec raccordement par triangles (Figure 4-25).	153
Figure 4-33 : (a) Norme du vecteur déplacement (en mm) et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) de la structure avec raccordement par triangles.	154

Figure 4-34 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres avec raccordement par triangles.....	155
Figure 4-35 : Répartition des contraintes de cisaillement (a) τ_{xy} et (b) τ_{xz} dans les poutres avec raccordement par triangles.....	156
Figure 4-36 : Répartition de la contrainte de Von Mises dans le volume avec raccordement par triangles.	156
Figure 4-37 : Répartition des contraintes (a) normale et (b), (c) de flexion dans les poutres avec raccordement par triangles.....	158
Figure 4-38 : Répartition de l'énergie de déformation dans les éléments du modèle optimisé adapté après AEF 3D de ce dernier.....	160
Figure 4-39 : Illustration (a) du résultat de l'optimisation par la méthode SIMP adaptative et (b) du modèle CAO converti.....	161
Figure 5-1 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de <i>design</i> (en bleu) et de <i>non-design</i> (en rouge). ..	164
Figure 5-2 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations. ...	165
Figure 5-3 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.....	167
Figure 5-4 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.	168
Figure 5-5 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).	169
Figure 5-6 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.	170
Figure 5-7 : Modèle 1D-3D maillé.....	171
Figure 5-8 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en <i>Joules</i>).	171
Figure 5-9 : (a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) (en <i>mm</i>).....	172

Figure 5-10 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.	172
Figure 5-11 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de <i>design</i> (en bleu) et de <i>non-design</i> (en rouge). ..	175
Figure 5-12 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations...	177
Figure 5-13 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.	178
Figure 5-14 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.	179
Figure 5-15 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).	180
Figure 5-16 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.	180
Figure 5-17 : Modèle 1D-3D maillé.....	181
Figure 5-18 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en <i>Joules</i>).	182
Figure 5-19 : (a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement $\times 300$) (en mm).....	182
Figure 5-20 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.	183
Figure 5-21 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de <i>design</i> (en bleu) et de <i>non-design</i> (en rouge). ..	186
Figure 5-22 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations...	188
Figure 5-23 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.	189
Figure 5-24 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.	190
Figure 5-25 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).	191

Figure 5-26 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.	191
Figure 5-27 : Modèle 1D-3D maillé.....	192
Figure 5-28 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en <i>Joules</i>).	193
Figure 5-29 : a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) (en <i>mm</i>).....	193
Figure 5-30 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.	194
Figure 6-1 : Modèle <i>cas test</i> : illustration (a) du modèle CAO initial, (b) du résultat de l'optimisation topologique adaptative, (c) du résultat de la conversion et (d) du modèle CAO sous forme d'assemblage de poutres.....	203
Figure 6-2 : (a), (b) Illustration des boucles d'adaptation de la fraction volumique.	205
Figure 6-3 : (a) Répartitions optimales de la densité de matière après la SIMP ; (b) la courbe-squelette du modèle et (c) la répartition des contraintes maximales et minimales dans les poutres respectivement pour $f = 4\%$ et 5% (tirée de Nana et <i>al.</i> [16]).....	207
Figure 6-4 : (a), (b) Répartitions optimales de la densité de matière après la SIMP et squelette normalisé (c) avant et (d) après modification.	214
Figure 6-5 : Illustration du nuage de points d'une enveloppe et du squelette obtenu....	216

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

AEF	Analyse par éléments finis
AESO	Optimisation structurale évolutive par addition de matière uniquement (<i>Addition only Evolutionary Structural Optimization</i>)
B-REP	Représentation par les frontières (<i>Boundary Representation</i>)
BESO	Optimisation structurale évolutive bidirectionnelle (<i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>)
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
EF	Éléments finis
ESO	Optimisation structurale évolutive (<i>Evolutionary Structural Optimization</i>)
FAO	Fabrication Assistée par Ordinateur
SIMP	Matériau isotrope solide avec pénalisation (<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>)
STEP	Standard pour l'échange de données de produit (<i>Standard for the Exchange of Product Model Data</i>)

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

1.1 Contexte

La conception d'un produit est l'étape indispensable entre l'idée et le produit. De nos jours, la forte concurrence dans de nombreux domaines de pointe, le coût croissant de l'énergie, le constant souci de perfection et de recherche de la combinaison idéale entre la qualité et le prix poussent les entreprises à se tourner vers de nouvelles méthodes de conception. Dans un monde industriel où la compétition conduit à des cahiers des charges complexes, une solution courante lors du développement d'un produit est d'utiliser les méthodes numériques d'optimisation. L'évolution rapide de l'outil informatique, tant au niveau de l'interactivité que de la puissance de calcul des ordinateurs, a facilité le développement, la maturation et l'automatisation de ces dernières. Omniprésentes dans plusieurs secteurs, elles sont devenues un réflexe commun durant la conception et sont considérées comme un levier de compétitivité et d'efficacité par les bureaux d'études.

Concevoir plus performant, plus innovant, plus léger, plus vite et à moindre coût constitue l'idée majeure sous-jacente à l'utilisation des méthodes d'optimisation. Elles permettent entre autres de concilier les exigences des cahiers des charges, les besoins spécifiques des clients et les fluctuations du marché, en plus de répondre aux différentes normes notamment en matière de sécurité et d'environnement. Avant de faire des tests en conditions réelles, il est désormais possible de procéder à plusieurs analyses avec des niveaux de complexité variables et ce, sur des modèles virtuels presque réels, tout en explorant différentes variantes du produit. Non plus réservés aux entreprises et groupes de recherche comme c'était le cas il y a quelques décennies, ces outils pluridisciplinaires ont déplacé les limites de la conception, et sont accessibles au grand public.

Dans un tel contexte, le concepteur doit relever un défi qui va plus loin que l'amélioration simple des performances du produit. Cette amélioration passe par une optimisation de tous les paliers de la conception à la fabrication. À cet effet, l'optimisation des structures et en particulier l'optimisation topologique intervient au niveau de la conception, autrement dit lorsque l'ingénieur désire atteindre un objectif fixé (par exemple un niveau de rigidité ou de contrainte), tout en respectant un certain nombre de critères (par exemple un pourcentage volumique, une variation de forme, des sollicitations extérieures). Ce dernier doit pleinement intégrer le cycle de vie du produit qui va de la saisie du besoin à la fin de vie du produit en passant par la conception, le prototypage, la fabrication, l'utilisation, l'entretien et le recyclage. Il doit également être capable de prendre en compte les exigences spécifiques du client (exemple de l'esthétisme) aussi bien que les contraintes de fabrication qui sont des paramètres pouvant ou non être traduits par les lois de la physique selon le problème.

L'optimisation topologique [1] peut être considérée comme un outil d'aide à la conception. Elle permet à l'ingénieur de s'appuyer sur une méthode rationnelle pour le choix des caractéristiques générales du produit à créer. Elle lui suggère la forme, la nature et la connectivité des éléments constitutifs du modèle qui est optimal au regard des critères qu'il a définis. Elle revêt un intérêt particulier qui se traduit notamment par la réduction du poids du produit, du nombre d'essais destructifs, du temps de développement et de la consommation de matières premières et d'énergie. Ceci entraîne une diminution du coût global du produit tout en concevant des produits performants et concurrentiels. Certains auteurs s'accordent effectivement sur le fait que [2] : *"Ceci [automatiquement produire une solution initiale de la structure dans une période significativement réduite par rapport à la méthode classique de conception-évaluation-reconception] est d'une importance particulière, puisque le temps ainsi sauvé peut être utilisé pour améliorer d'autres zones du véhicule."* Continuant son intégration progressive dans les bureaux d'études en changeant les méthodes classiques de conception, sa fiabilité et son niveau de maturité n'ont cessé de croître depuis son avènement, il y a environ une trentaine d'années. En plus de la mécanique, son champ d'application s'étend à présent de manière non exhaustive à

l'industrie aéronautique, aérospatiale, dentaire, cinématographique, médicale, civile et militaire.

1.2 Problématique

L'intégration d'une méthode d'optimisation topologique dans le processus de conception constitue l'un des défis à relever lors de la conception des pièces et des structures de nos jours. Comme l'indiquent les récents travaux de Liu et *al.* [3] : "[...] *les méthodes industrielles conventionnelles comme l'usinage et l'injection moulage/coulage dominant toujours le secteur industriel. Les problèmes d'optimisation topologique devraient donc être formulés et résolus avec une attention particulière sur les besoins industriels afin de produire des topologies simples qui sont fabricables par les méthodes industrielles conventionnelles.*" De fait lors de la conception, l'optimisation topologique permet d'obtenir une silhouette primitive dite optimisée de la pièce à concevoir. Cependant, *l'outil d'optimisation topologique dans son état actuel n'est pas utilisé à son plein potentiel, car les résultats que ce dernier génère sont difficiles à exploiter et loin d'être facilement réalisables sans modifications substantielles.*

Cette problématique comporte deux niveaux de difficulté. La première est inhérente à la qualité du résultat de l'optimisation. En effet, plusieurs ajustements sont nécessaires et préalables à la mise en forme du modèle optimisé. C'est ainsi que même si le processus d'optimisation est probant, l'interprétation du résultat de l'optimisation engendre des coûts non négligeables essentiellement en temps d'interprétation, qui à son tour dépend de l'expérience du concepteur. Plus encore, cette interprétation peut aboutir à l'obtention de solutions éloignées de la forme du modèle optimisé initialement proposé, annihilant par le fait même les avantages de l'optimisation. La deuxième difficulté trouve ses fondements dans la nécessité de faire intervenir le concepteur dans le processus d'interprétation. Cela a pour effet de rendre les méthodes actuelles d'interprétation semi ou non automatiques, réduisant de ce fait leur efficacité.

Cet ensemble de faits rend la tâche de la conception d'une méthode d'interprétation automatique et facile à généraliser ardue et délicate. En effet, lors d'une optimisation topologique par distribution de matière comme c'est le cas dans cette recherche, la forme des modèles optimisés varie d'un modèle composé d'éléments structuraux (exemple de poutres) à un modèle volumique et ce, en fonction principalement de la fraction volumique finale [4, 5]. De faibles fractions volumiques produisent des configurations de type structure de poutres alors que des fractions élevées résultent en des modèles volumiques. C'est ainsi que, dépendamment du type de configuration du modèle optimisé, des approches d'interprétation différentes doivent être utilisées [6-8]. Ce travail se focalise sur la première configuration, soit les modèles optimisés s'orientant vers des structures composées de poutres.

1.3 Objectifs

Ce projet s'inscrit dans la continuité de travaux effectués au sein du groupe de recherche en Optimisation des Structures (OptiS) de l'Université de Sherbrooke, en collaboration avec l'Équipe de Recherche en Intégration CAO – Calcul (ÉRICCA) de l'Université du Québec à Trois-Rivières [9-14], avec pour dessein l'intégration d'une méthode d'optimisation topologique dans le processus de CAO/FAO.

Dans le présent projet, il s'agit *d'interpréter automatiquement un résultat d'optimisation topologique en vue de le transformer en un modèle CAO de structure de poutres droites*. En d'autres termes, les informations obtenues à la fin de ce processus d'interprétation doivent permettre d'exploiter et de fabriquer à l'aide de procédés traditionnels le modèle CAO découlant. De plus, *la méthode d'interprétation doit être automatique et parfaitement s'intégrer dans un processus global de conception*. Le défi est donc de *boucler la boucle* du processus de conception de pièces et structures par optimisation topologique par l'interprétation automatique du modèle optimisé.

1.4 Contributions

Interpréter automatiquement en modèles CAO les résultats d'optimisation topologique permet notamment de faire disparaître les irrégularités de l'enveloppe du modèle optimisé, de faciliter la validation du modèle converti, d'augmenter le potentiel de fabrication du modèle optimisé par des procédés traditionnels, de réduire le temps de conception, ainsi que le coût de développement du produit. Il y a peu ou pas d'outils qui peuvent prétendre intégrer de façon automatique à la fois des méthodes d'optimisation topologique et d'interprétation des résultats de l'optimisation. Cette thèse apporte des contributions à ce problème en proposant :

- Une méthode d'adaptation des résultats d'optimisation topologique. L'adaptation améliore la qualité des solutions de l'optimisation. Il en résulte un modèle optimisé *adapté* qui possède notamment une compliance plus faible et une meilleure définition de ses frontières. Cette méthode a fait l'objet d'un article de journal publié [15].
- Une méthodologie de transformation en modèles CAO des modèles optimisés adaptés. Celle-ci convertit en modèles CAO d'assemblage de poutres droites les résultats optimisés adaptés qui s'orientent vers des structures de poutres. Le modèle converti, obtenu sous forme de représentation par les frontières (B-REP pour *Boundary Representation* en anglais) est ensuite validé par une AEF qui utilise à la fois des éléments finis poutres et tétraèdres. Cette méthodologie a également fait l'objet d'articles de journaux publiés [16, 17].
- Une intégration automatique des deux précédentes approches dans un processus global de conception. Ceci permet un gain substantiel en temps d'interprétation, tout en étant indépendant de l'intervention du concepteur. Ce processus global de conception fait l'objet du présent manuscrit et pourrait faire l'objet d'un autre article de journal.

1.5 Organisation de la thèse

Après avoir ainsi présenté le contexte de cette recherche dans le Chapitre 1 actuel, le Chapitre 2 aborde les méthodes d'optimisation de structures. On verra à cet effet que les trois grandes familles d'optimisation sont : l'optimisation paramétrique, l'optimisation géométrique et l'optimisation topologique sur laquelle un accent particulier sera mis. Le chapitre présente également la méthodologie d'interprétation développée qui comprend l'optimisation topologique adaptative et la conversion du modèle optimisé adapté. Le chapitre se ferme sur un aperçu des différents outils utilisés dans ce travail.

Le Chapitre 3 se consacre à la présentation détaillée de la méthode d'optimisation topologique adaptative. Comme on le verra, contrairement à la plupart des méthodes actuelles, l'approche proposée est entièrement automatique et permet simultanément un raffinement et un déraffinement ciblés du maillage. Plus encore, certains éléments de la procédure d'optimisation topologique ont été modifiés afin de les accommoder à un maillage à forte gradation de taille.

Dans le Chapitre 4 est présentée la méthodologie d'interprétation en modèles CAO des solutions de l'optimisation topologique adaptative. Le résultat est obtenu de manière automatique et est plus facile à manipuler dans la suite du processus de conception. L'approche proposée produit des modèles CAO de structures de poutres droites facilement mis en forme par des procédés de fabrication soustractive ou de déformation, en d'autres termes des procédés en opposition à la fabrication additive ou prototypage rapide.

Le Chapitre 5 consiste en la présentation des cas d'étude et à l'analyse des résultats obtenus pour chaque cas. Dans cette optique, trois exemples d'application ont été utilisés pour tester l'approche proposée. La validation du modèle converti par une analyse par éléments finis et la comparaison de ce dernier avec le modèle optimisé adapté permettent de constater l'effectivité de l'approche proposée dans l'interprétation du résultat de l'optimisation. Ce chapitre se referme sur une discussion générale des résultats.

Pour terminer, après avoir rappelé les objectifs de cette thèse, la méthodologie d'interprétation développée et les résultats obtenus, les améliorations pouvant être apportées et les jalons de futurs travaux sont posés dans le Chapitre 6 qui conclut ce document.

CHAPITRE 2 ÉTAT DES CONNAISSANCES

2.1 Introduction

De nos jours, la manière classique et fastidieuse de conception, basée sur les connaissances intuitives ou empiriques du concepteur, est de plus en plus remplacée par des outils d'aide à la conception tels que les méthodes d'optimisation. La façon habituelle de concevoir un produit est de procéder par essai-erreur. Une solution au problème est modélisée, puis analysée par éléments finis. Cette boucle est effectuée tant que le modèle ne respecte pas les critères de conception. Une fois ces critères remplis, un prototype est fabriqué et la résistance de celui-ci est validée (Figure 2-1).

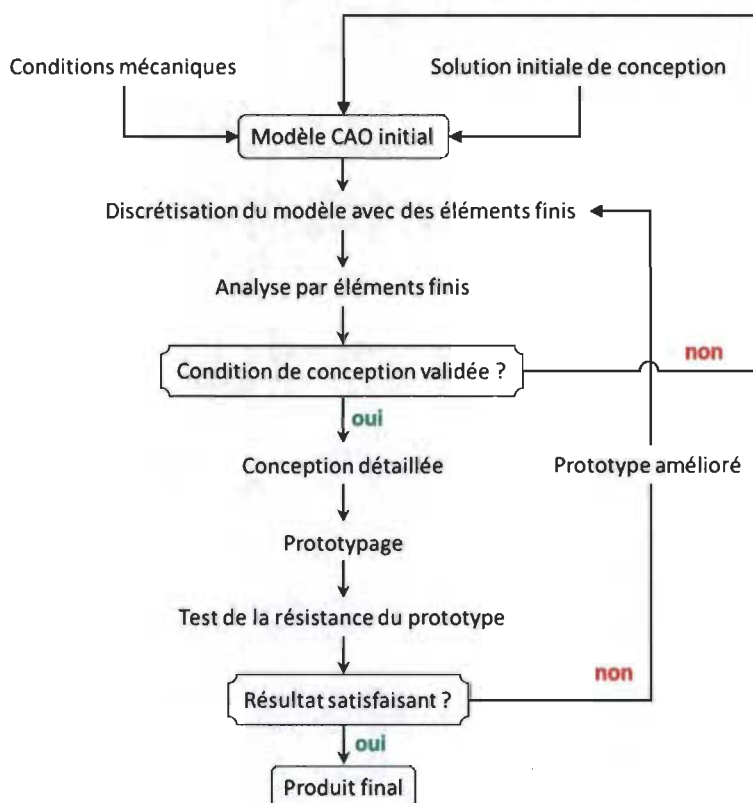


Figure 2-1 : Processus de conception par essai-erreur.

Les méthodes d'optimisation ont automatisé ce processus. Modifier les propriétés mécaniques d'un matériau, les caractéristiques de section d'une poutre, agrandir des trous existants ou créer de nouveaux trous sont autant d'exemples d'améliorations possibles. Dans le cas particulier des méthodes d'optimisation de formes (voir Figure 2-2), l'on ne conserve que la matière nécessaire au fonctionnement du produit. Ceci permet de réduire le nombre d'étapes et de prototypes avant la fabrication et de converger plus vite que l'approche précédente vers une forme optimisée qui respecte les critères de conception. Elle comprend quatre étapes que sont la modélisation du problème dans un logiciel de CAO, le maillage (discrétisation d'un domaine à l'aide d'éléments finis encore appelés mailles), l'optimisation proprement dite, puis le prototypage. En pratique, le processus d'optimisation comprend une subdivision du domaine initial en sous-domaines de *design* (ou de conception) et de *non-design*. La dernière zone reste intouchée durant l'optimisation afin notamment de garantir un résultat fonctionnel, tandis que la première correspond au sous-domaine dans lequel l'optimisation a lieu.

Ce chapitre aborde les méthodes d'optimisation de formes, ainsi que les méthodes d'interprétation des résultats obtenus.

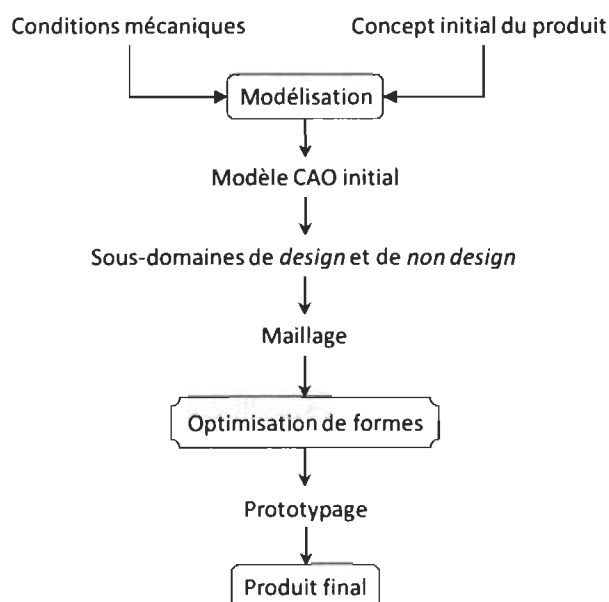


Figure 2-2 : Processus de conception par optimisation de formes.

2.2 Optimisation de formes

Les méthodes d'optimisation de formes facilitent la recherche de la géométrie optimale d'une pièce tout en offrant au concepteur un large éventail de choix de formes avant prototypage. De manière générale, *optimiser* c'est perfectionner les conditions d'utilisation, de fonctionnement et la rentabilité de quelque chose. Plus concrètement, c'est trouver les valeurs des variables qui rendent optimale une fonction. Pour ce faire, trois éléments sont généralement nécessaires : le modèle à optimiser, le critère d'optimisation et les contraintes. Le modèle est généralement une équation mathématique. Les critères sont les paramètres à minimiser ou maximiser et les contraintes sont des conditions que l'on impose aux variables.

On retrouve dans la littérature trois grandes familles d'optimisation de formes classées par ordre de complexité [1] : *paramétrique* (Figure 2-3a), *géométrique* (Figure 2-3b) et *topologique* (Figure 2-3c). Lors de l'optimisation paramétrique, les formes sont paramétrées par un nombre réduit de variables telles que l'épaisseur ou la section transversale. L'optimisation géométrique consiste à faire varier la position des frontières d'une forme, sans toutefois changer sa topologie qui reste la même que celle de la forme initiale. L'optimisation topologique [1, 18, 19] quant à elle cherche à déterminer le sous-domaine occupé par la matière constitutive d'un modèle sans a priori sur la nature et la connectivité des éléments qui la composent.

Cependant, la modification géométrique lors de l'optimisation paramétrique du modèle n'est pas possible, car la **forme** et la connectivité de la structure sont connues a priori. Ceci limite la variété des formes possibles ou admissibles. D'un autre côté, les algorithmes d'optimisation géométrique sont très sensibles à la forme initiale et à la discrétisation du modèle à optimiser. Plus le modèle sera finement discrétisé, plus les détails et les oscillations de la frontière apparaîtront. Bien que l'on n'ait aucune condition de régularité sur la frontière, il n'est toutefois pas permis de modifier la topologie du modèle. Pour s'affranchir de ces limitations, il faudrait sortir du cadre de l'optimisation de forme paramétrique pour effectuer une optimisation topologique.

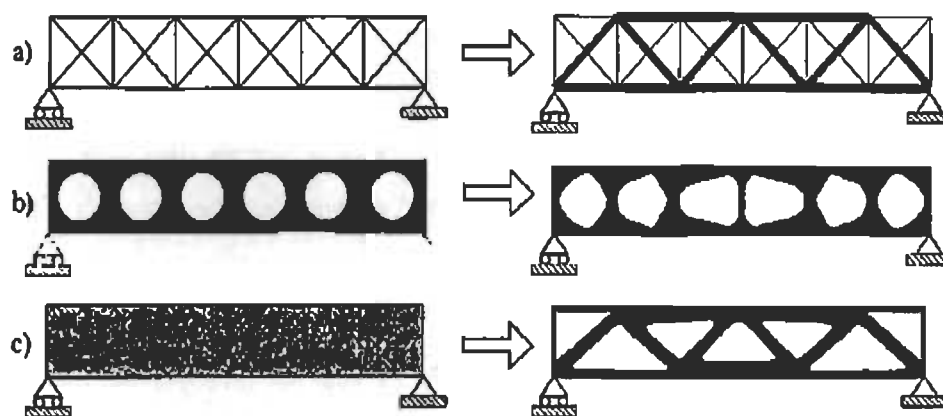


Figure 2-3 : Familles d'optimisation de formes (tirée de Bendsoe et *al.* [1]).

2.3 Optimisation topologique

La topologie d'une pièce désigne la nature et la connectivité des éléments du domaine occupé par la matière et par corollaire, le nombre, la forme, les dimensions et la localisation des perforations dudit domaine. L'optimisation topologique est une méthode d'optimisation qui consiste à rechercher la silhouette d'une structure sujette à certaines contraintes sans a priori sur sa forme, ses dimensions, le nombre de ses éléments constitutifs et leur connectivité. La nature (forme, type, dimensions) des composants présents dans la forme optimisée est suggérée par le résultat du processus d'optimisation sans aucune restriction ni spécification préalable.

Les méthodes d'optimisation topologique peuvent être regroupées en quatre grandes familles [1] : les méthodes d'homogénéisation [4, 20], les méthodes évolutives ou évolutionnaires [21, 22], la méthode SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) [23, 24] et les méthodes par lignes de niveau (ou *level-Set*) [25, 26]. Un tableau regroupant les auteurs en fonction de la méthode d'optimisation utilisée et de la *fonction objectif* (fonction du modèle à améliorer) considérée peut être retrouvé dans [27].

2.3.1 Méthodes d'homogénéisation

L'homogénéisation vise à approximer par un matériau macroscopiquement homogène les matériaux de propriétés microscopiques très hétérogènes comme les composites. Le principe des méthodes d'homogénéisation part de l'observation toute simple qu'un seul trou dans une pièce la rend plus fragile qu'un ensemble de minuscules trous répartis à toute la structure pour une même masse. L'idée est d'introduire dès le début un ensemble de petits trous dans le matériau initial, changeant de ce fait sa microstructure. Le problème d'optimisation par la suite consiste à trouver la meilleure utilisation possible de la matière en incluant ces composites [28]. L'une des difficultés majeures de cette formulation est la nécessité de modéliser avec soin les matériaux perforés. Les propriétés macroscopiques de ces derniers sont calculées à l'aide de la méthode ou théorie d'homogénéisation et les trous (le vide) sont modélisés par des matériaux de très faible densité [5]. L'homogénéisation devient dans ce cas intrinsèque à la méthode d'optimisation. Un résultat optimisé en utilisant la méthode d'homogénéisation est illustré sur la Figure 2-4.

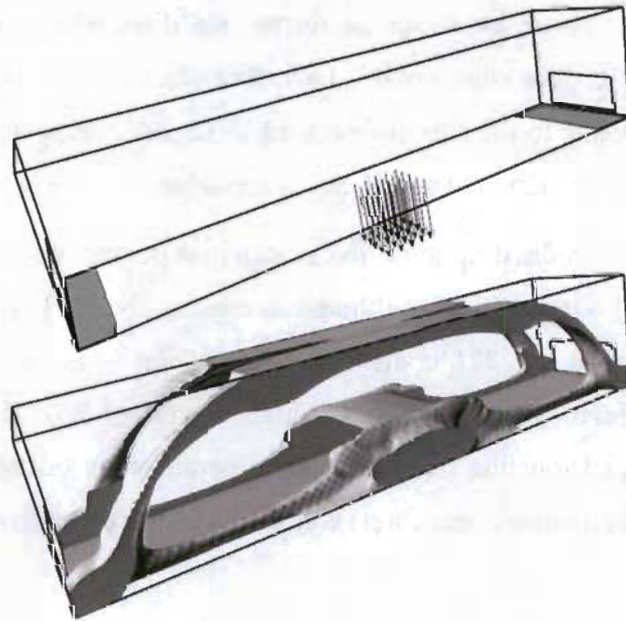


Figure 2-4 : Résultat de la méthode d'homogénéisation (tirée de Allaire et *al.* [28]).

Toutefois, l'utilisation de microstructures composites impose d'utiliser une classe de composites assez riche pour s'approcher aussi bien que possible des composites optimaux. Il faut également tenir compte de l'orientation optimale de la direction dans le matériau, de la disposition optimale des couches de composites constituant le matériau, ainsi que de la détermination de l'ensemble des matériaux composites optimaux que l'on va retrouver dans la solution. Ceci conduit à un nombre élevé de variables de conception et, par conséquent, plus de temps est consacré à l'homogénéisation des matériaux qu'à l'optimisation proprement dite. De plus, la solution théorique obtenue étant constituée de microstructures très souvent continues et difficiles à fabriquer traditionnellement, une étape de post-traitement (pénalisation) est nécessaire [28].

2.3.2 Méthodes évolutionnaires

Cette seconde famille est constituée des méthodes ESO (*Evolutionary Structural Optimization*) dites évolutives. La méthode ESO consiste à progressivement retirer de la matière dans les zones les moins contraintes jusqu'à l'obtention de la forme optimisée [21, 29]. Les éléments contribuant le moins sont choisis à l'aide du coefficient de rejet RR (*Rejection Ratio*) — quotient entre la contrainte à l'intérieur de chaque élément et la contrainte maximale admissible de la structure — défini tel que $0 \leq RR \leq 1$. Lors d'une itération, si aucun élément ne satisfait la condition de rejet ($\sigma_{VM} \leq RR \cdot \sigma_{MAX}$), un état d'équilibre est atteint, le coefficient RR est alors incrémenté d'un coefficient évolutif ER (*Evolutionary Rate*) d'où la méthode tire sa dénomination. Ensuite, l'analyse des éléments finis et le retrait des éléments recommencent. L' ER caractérise la quantité de matière à retirer à chaque itération dans les zones spécifiées à l'aide du RR . Une petite valeur de l' ER est conseillée (généralement 1 %) afin d'éviter les résultats singuliers. Le retrait de faibles quantités de matière à certains endroits de manière régulière permet à la topologie de la structure d'évoluer lentement et à la distribution des contraintes de devenir de plus en plus uniforme. Pratiquement, les éléments de faible contrainte voient simplement leur module d'élasticité fixé à $E = 0,001 \text{ MPa}$ et ne contribuent pas dans le modèle optimisé. Le processus évolutionnaire s'arrête lorsqu'aucun élément n'a de

contrainte inférieure à un seuil fixé par l'opérateur et préalablement défini sous forme d'un pourcentage de la contrainte maximale. Cette procédure d'optimisation évolutionnaire offre la possibilité de connaître la forme et silhouette de l'optimum à chaque état d'équilibre [21].

Cependant, les éléments supprimés en appliquant cette méthode ne peuvent être réintégrés au modèle. Le concept de bidirection (BESO pour *Bi-directionnal Evolutionary Structural Optimization* [30, 31]) permet de passer outre cette limite en combinant à la fois la méthode AESO (*Addition only ESO*) et la méthode ESO afin non seulement d'éliminer la matière dans les parties peu contraintes, mais aussi d'en ajouter pour soulager les zones de contraintes élevées. Le coefficient RR est alors défini tel que $0 \leq RR \leq 1$ et $RR = 0,001 \times SS + 0,01 \times ON$ où SS et ON sont des entiers permettant de compter respectivement les états d'équilibre et oscillatoire (lorsqu'un élément est supprimé puis rajouté lors de 2 itérations consécutives). Un nouveau coefficient, l'IR (*Injection Ratio*), analogue au RR, définit tel que $0 \leq IR \leq 1$ et $RR = 1 - 0,01 \times SS - 0,1 \times ON$, est introduit pour le rajout de matière dans les zones à contraintes élevées. Les résultats obtenus en utilisant la méthode BESO sont illustrés sur la Figure 2-5.

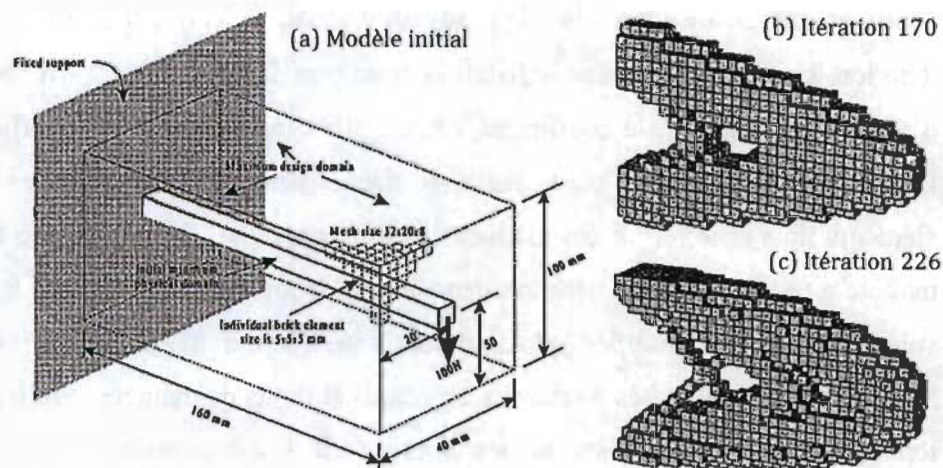


Figure 2-5 : (a) Problème d'optimisation, (b)-(c) les modèles optimisés par la méthode BESO (tirée de Young et al. [31]).

Quoique la méthode BESO donne un résultat binaire basé sur un calcul des contraintes (contrairement par exemple à la méthode d'homogénéisation), la qualité du résultat dépend de la taille des mailles qui doit être petite (maillage fin). D'un autre côté, un choix judicieux des variables de la méthode s'impose. En effet, les ratios utilisés sont tributaires de certains paramètres comme le compteur des états d'équilibre durant le processus, de même que le coefficient et le nombre d'oscillations (lorsqu'un élément est plusieurs fois ajouté puis supprimé après des itérations successives). Une comparaison exhaustive de ces méthodes avec la méthode SIMP peut être retrouvée dans [32].

2.3.3 Méthodes *Level-set*

La troisième famille se focalise principalement sur le déplacement de la frontière (bords de la forme), c'est-à-dire l'interface matière-vide. Le modèle est tout d'abord discrétisé et la topologie initiale sur laquelle se basera l'optimisation est choisie. La vitesse de déplacement de la frontière est ensuite calculée en différenciant la fonction objectif par rapport à la forme. Cette vitesse est utilisée pour déplacer la frontière au cours du processus d'optimisation. Allaire et *al.* [25] ont proposé une approche des lignes de niveau utilisant le gradient de forme (influence du mouvement des frontières sur la fonction considérée) et un matériau mou pour représenter le vide, permettant de cette façon de traiter des fonctions objectives de manière générale (voir exemple Figure 2-6). Une extension de cette notion de gradient de forme est le gradient topologique qui donne des informations sur l'opportunité de créer des trous de très petite taille à certains endroits du modèle. Un exemple d'application est la *bubble method* [33] qui introduit itérativement des petits trous dans le domaine de conception avant de les élargir.

Bien que les méthodes d'homogénéisation et *level-set* possèdent des coûts et résultats similaires, la dernière est très sensible au modèle initial (nombre de trous) et converge facilement vers des minima locaux. D'un autre côté, dans le cas des fonctions objectifs complexes ou en élasticité non linéaire, une combinaison des deux méthodes est suggérée, considérant le résultat de la méthode d'homogénéisation comme modèle initial avant application de la méthode *level-set* [34, 35].

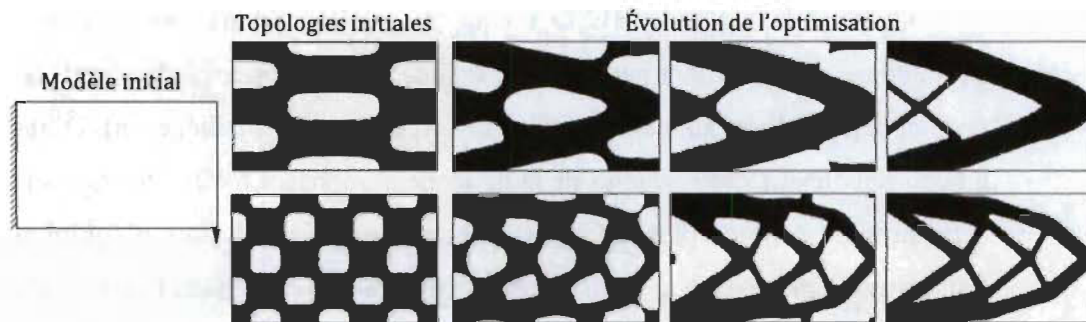


Figure 2-6 : Optimisation topologique par la méthode *level-set* avec 2 topologies initiales différentes (tirée de Allaire et al. [25]).

2.3.4 Méthode SIMP

La méthode SIMP, pour *Solid Isotropic Material with Penalization*, constitue la dernière famille de méthodes d'optimisation topologique. À notre connaissance, il s'agit de la méthode la plus utilisée dans plusieurs logiciels d'optimisation topologique. Le mot *Solid* du « S. » dans l'acronyme SIMP s'inscrit en opposition au matériau poreux de la première famille. La méthode SIMP consiste, après discrétisation du modèle, en une répartition de la densité de matière dans le modèle sous certaines contraintes afin d'en dégager la forme la plus rigide. Elle fixe les propriétés d'un matériau *fictif* à partir de la valeur de la densité correspondante. Cet ensemble de matériaux entre le vide (densité nulle) et la matière pleine (densité égale à l'unité) permet de remédier au concept de microstructures *réelles* de la première famille d'optimisation [28]. De plus, le nombre de variables est réduit (par rapport par exemple à la première famille), ce qui permet un gain en coût (contrairement à la seconde famille). Par ailleurs, le processus de pénalisation, ajustable à la convenance du concepteur, est interne à la méthode et permet d'obtenir des valeurs de la densité proche de 0 ou de 1 [1]. La Figure 2-7 illustre un résultat d'optimisation en utilisant la méthode SIMP.

La dépendance de la solution optimisée au type et à la taille des mailles, l'effet damier ou *checkerboarder effect* au même titre que l'apparition des minima locaux constituent un éventail de limites de la méthode SIMP [36]. La dépendance de la solution

au maillage fait référence au fait d'obtenir une qualité de solution différente si l'on change la taille des mailles (Figure 2-7[c et d]). L'effet damier fait allusion à l'alternance entre les éléments solides et le vide, comme sur un damier tel que le montre la Figure 2-7b. Les minima locaux correspondent au fait qu'une petite variation des paramètres initiaux de l'algorithme, notamment les frontières ou la géométrie du domaine à optimiser, le nombre d'éléments ou encore les paramètres du filtre, donne des solutions différentes pour un même problème. Des détails sur ces différentes limites peuvent être retrouvés dans [36] où les auteurs proposent principalement des filtres comme moyens palliatifs à l'effet damier. D'un autre côté, le problème, comme formulé par la SIMP, très souvent maximise la rigidité de la structure sans toutefois tenir compte de la concentration des contraintes. Une analyse par éléments finis (validation du modèle) est nécessaire une fois le modèle optimisé obtenu afin de vérifier si ce dernier, au-delà d'une bonne rigidité, reste dans la zone des contraintes admissibles.

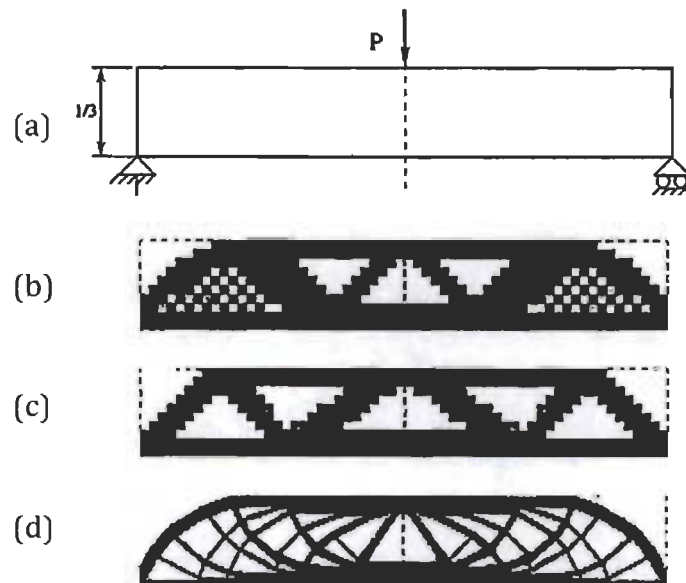


Figure 2-7 : Optimisation topologique par la méthode SIMP. (a) Problème d'optimisation et (b) illustration de l'effet damier. Modèle optimisé avec (c) 600 et (d) 5400 éléments (tirée de Sigmund et *al.* [36]).

Dans cette première partie du chapitre, un panel non exhaustif de méthodes utilisées lors de l'optimisation topologique a été présenté. Dans l'ensemble, l'on distingue quatre grandes familles de méthodes d'optimisation topologique que sont les méthodes d'homogénéisation, les méthodes évolutionnaires, les méthodes *level-set* et la méthode SIMP. Leur différence de principe se répercute sur leurs résultats. Ainsi, pendant que les modèles optimisés qui résultent des méthodes BESO et SIMP dépendent de la taille des éléments du maillage, la méthode *level-set* dépend de la topologie initiale utilisée, et retrouver le matériau poreux optimisé par la théorie d'homogénéisation rend la méthode d'homogénéisation assez coûteuse. Dans tous les cas, l'enveloppe de la forme optimisée est irrégulière et doit être post-traitée. Ceci fait l'objet des paragraphes suivants.

2.4 Interprétation des résultats d'optimisation topologique

L'interprétation d'un résultat d'optimisation topologique dépend principalement du type de pièces (volumique, assemblage, ou autres) et de la qualité du résultat obtenu (répartition de la densité, de la contrainte, ou autres) qui à son tour dépend de la méthode d'optimisation utilisée. Cette partie s'intéresse aux méthodes permettant de construire un modèle 3D solide à partir d'un résultat d'optimisation topologique. Ces méthodes peuvent être regroupées en deux grandes familles. Il s'agit des méthodes qui effectuent des sections (tranches) du modèle optimisé pour en capturer la silhouette, et de celles qui utilisent des formes géométriques simples pour approximer le modèle optimisé.

2.4.1 Interprétation par découpage isovaleur

Le principe de cette interprétation est basé sur l'extraction d'une isovaleur (exemple de l'isodensité dans le cas de la méthode SIMP [37, 38] ou de l'isocontrainte de Von Mises dans le cas des méthodes de type ESO [39]) qui représente très souvent la fonction d'optimisation. Cependant, du fait de la pénalisation des valeurs intermédiaires durant l'optimisation par la méthode SIMP, le résultat obtenu possède des éléments de densité très proche de 0 ou de 1. En pratique, un lissage de cette densité lors du processus d'optimisation est indispensable afin de couvrir toute la plage d'extraction. C'est

pourquoi, dans le cas où le modèle optimisé consiste en une fonction constante par élément utilisé pour discrétiser le modèle initial, une extrapolation des valeurs de cette dernière aux nœuds peut être effectuée pour former un isocontour (en 2D) ou une isosurface (en 3D). En général, un isocontour est le lieu des points pour lesquels une certaine fonction (densité, température, contrainte, raideur, pression, vitesse...) est constante. L'isosurface est l'analogue en 3D de l'isocontour.

2.4.1.1 Interprétation par extraction d'isocontours

Dans le cas d'une répartition de la densité dans le modèle, la première étape du principe d'interprétation par isocontour d'un modèle optimisé est de choisir la direction de tranchage et le nombre de sections nécessaires pour interpréter le modèle [27, 40-42]. Les nœuds d'un profil ayant la même valeur de densité sont considérés comme points à interpoler. L'enveloppe du modèle est formée à partir des courbes *B-Splines* (fonction d'une variable définie par morceaux par des polynômes [43]) et le modèle est finalement généré par balayage. Un exemple d'illustration est présenté sur la Figure 2-8, où la direction de tranchage est verticale et ascendante, et les sections effectuées perpendiculairement à cette direction.

Surtout adaptée aux modèles 2D et aux modèles 3D qui sont assez simples, cette méthode a le désavantage de dépendre du nombre de sections effectuées et de la direction de tranchage, et par corollaire, de l'expérience du concepteur. Il serait en effet difficile de représenter des détails internes à partir d'une seule direction de section, sans compter que plus le nombre de sections est élevé, plus le temps pour retrouver le modèle solide est long. Plus encore, la sélection des sections et de leur direction étant manuelle, la méthode est donc partiellement automatique.

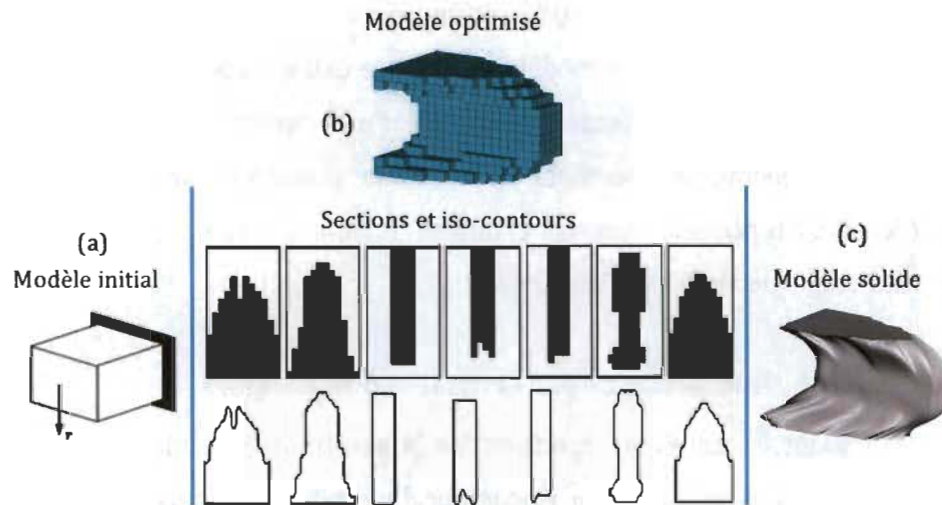


Figure 2-8 : (a) Problème, (b) Optimisation, sections et isocontours, (c) Modèle solide (tirée de Hsu et al. [27]).

2.4.1.2 Interprétation par extraction d'isosurfaces

Lorsque les données sont volumiques, l'on utilise très souvent les isosurfaces. Par exemple en imagerie médicale, pour visualiser de manière réaliste les organes internes et d'autres structures corporelles, on les utilise pour représenter des régions de densité donnée sur des scans.

Dans le cas d'une discrétisation du modèle avec des éléments finis tétraédriques et d'une répartition de la densité dans ces éléments, l'isosurface est extraite sous forme de triangulation par découpage des éléments. Il existe $2^4 = 16$ façons dont une isosurface coupe un tétraèdre [37] : 2 possibilités par nœud d'un tétraèdre. Le résultat obtenu est soit un triangle, soit deux triangles (voir illustration Figure 2-9). Ce principe a été récemment utilisé par Cuillière et al. [14] pour extraire sous forme de triangulation des isosurfaces de résultats d'optimisation topologique par la méthode SIMP. Une fois l'isosurface fermée extraite, on convertit les triangles de la surface en quadrangles (voir illustration Figure 2-10) [37]. Ces quadrangles sont à leur tour transformés en morceaux de surface biquartique de Bézier [37, 43], après avoir détecté la forme de la surface (crêtes, vallées et surfaces planes).

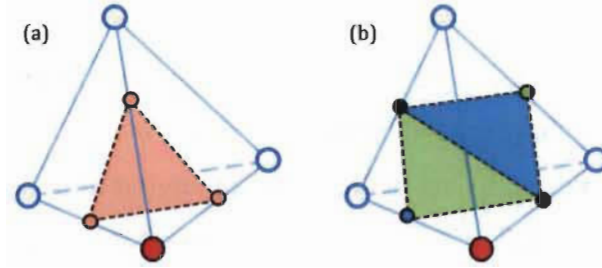


Figure 2-9 : Exemple d'intersection isosurface-tétraèdre : (a) 1 triangle, (b) 2 triangles.

La détection des éléments saillants de la triangulation comme les crêtes, les vallées et zones planes consiste au classement des nœuds en fonction des valeurs propres de la matrice formée par le vecteur normal de chaque triangle dans le voisinage du nœud considéré. En considérant un nœud v ayant N triangles voisins T_i , A_i l'aire de T_i , A_{max} l'aire du plus grand triangle de la surface, g_i la distance géodésique (distance minimale entre deux points sur une surface) en v , c_i le centroïde (centre d'un polygone) de A_i et comme paramètre de contrôle, est classé à partir de la matrice [44, 45] :

$$V_v = \sum_{i=1}^N w_i V_i = \sum w_i \vec{N}_i \vec{N}_i^T \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \vec{N}_i = \vec{n}_i - 2 \cdot \frac{\vec{n}_i \cdot \vec{vc}_i}{\|\vec{vc}_i\|^2} \cdot \vec{vc}_i \\ w_i = \frac{A_i}{A_{max}} \exp\left(-\frac{g_i}{\sigma}\right) \end{cases} \quad (2-1)$$

Si $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ sont les valeurs de V_v , la plus grande valeur entre $\lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda_2 - \lambda_3$ et λ_3 permet de classer le nœud v comme appartenant respectivement à une surface, une arête vive (*crease*), ou un sommet (*corner*) [45].

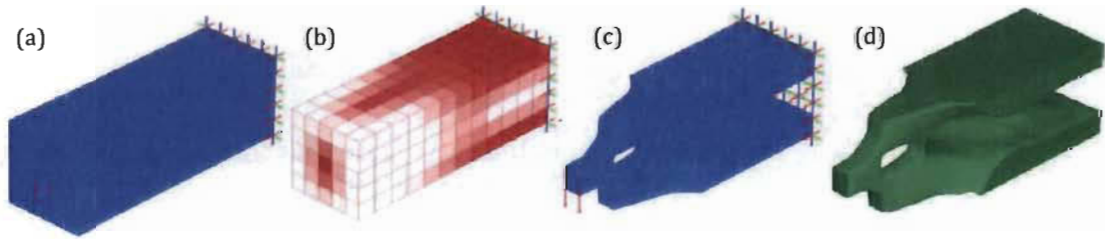


Figure 2-10 : (a) Problème (b) Optimisation (c) Isosurfaces à $\rho = 0,84$ (d) Modèle solide (tirée de Koguchi et al. [37]).

Une stratégie similaire à [37] a été suggérée par Victoria et *al.* [39] qui ont introduit le concept d'ITD (*Isosurface Topology Design*) permettant l'extraction d'une isosurface après une optimisation topologique basée sur la méthode ESO. Cette fois, en utilisant des éléments cubiques, ils ont défini un maximum de 256 façons dont une isosurface peut couper un cube [37, 39]. La surface obtenue sous forme de triangulation de Delaunay (ensemble de triangles tel qu'aucun sommet d'un des triangles n'est à l'intérieur du cercle circonscrit d'un autre triangle) est reconstruite à partir des éléments de chaque facette issue des intersections. En général, lorsque la fraction volumique finale est faible, le processus de conception de topologie ITD produit des structures de type treillis [39]. La Figure 2-11 illustre un exemple de pylône électrique où le modèle optimisé a été obtenu en conservant seulement 5 % du volume de conception.

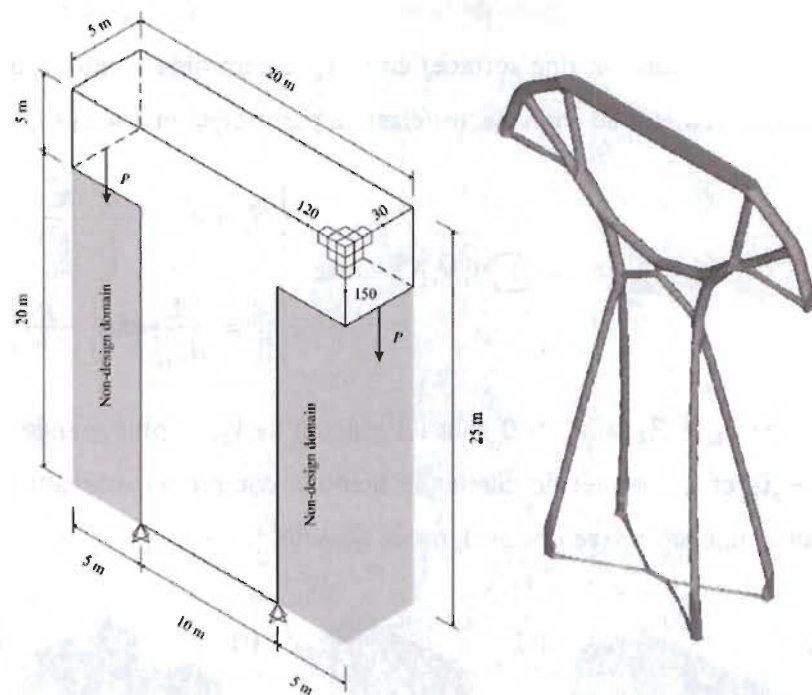


Figure 2-11 : Problème d'optimisation et solution sous forme d'isosurfaces (tirée de Victoria et *al.* [39]).

Lors de l'utilisation de l'ITD, une étape supplémentaire de post-traitement de la triangulation obtenue est à prévoir pour obtenir un modèle 3D solide. Ceci constitue l'une des principales limites de la méthode. En outre, le problème de l'isodensité reste le choix de la valeur idéale de la densité, ainsi que le type d'interpolation à utiliser. Certains suggèrent la valeur 0,30 [46] et d'autres 0,50 [27], le tout restant à la discrétion de l'opérateur.

2.4.2 Interprétation à l'aide de sections transversales

Cette approche consiste à faire des sections directement sur le modèle optimisé [47, 48]. La construction d'un modèle solide par tranchage avant lissage est surtout indiquée pour les modèles optimisés en utilisant les méthodes d'homogénéisation et *level-set* dont le résultat ne permet pas l'extraction d'une isovaleur comme dans le cas de la SIMP ou des méthodes ESO. Pour procéder au tranchage du modèle optimisé, on commence tout d'abord par définir la direction longitudinale de la section. Par la suite, on choisit manuellement la section la plus complexe et on calcule les courbes et surfaces *B-Splines* à partir des nœuds de la frontière. Le nombre de points de contrôle utilisé pour cette section sera le même pour toutes les autres. Un exemple d'illustration de ce principe est présenté sur la Figure 2-12.

Bien qu'il y ait une seule direction de tranchage, les opérateurs booléens tels que l'union, l'intersection et la différence utilisées dans le cas de l'interprétation des solides complexes, permettent de s'affranchir de la difficulté de représenter les détails internes, comme proposé par [48]. En outre, cette méthode nécessite de connaître a priori la forme de la structure modélisée. En conséquence, elle se prête bien à l'optimisation de pièces existantes. De surcroît elle est semi-automatique, dans la mesure où la sélection des sections est manuelle, de même que l'ensemble des opérations booléennes nécessaires, le cas échéant.

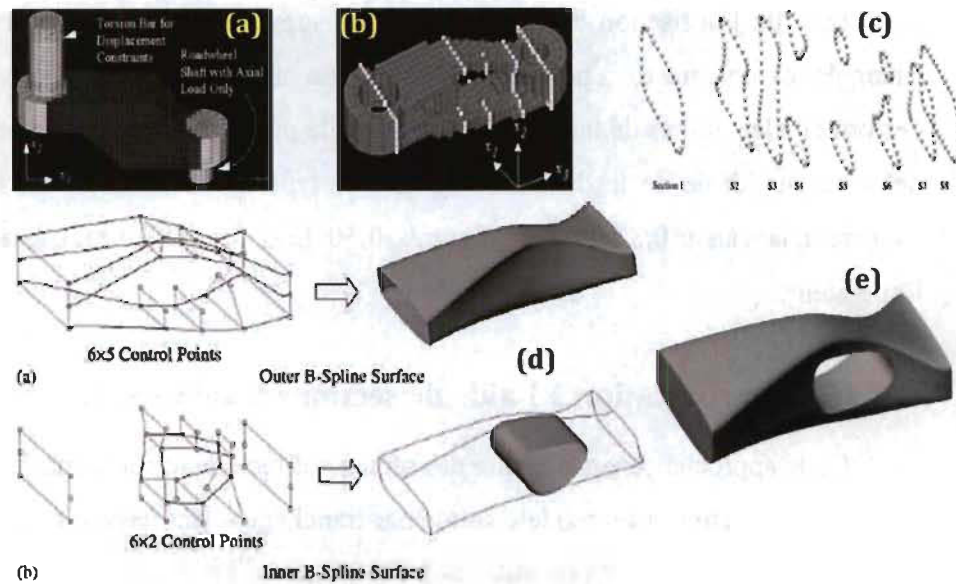


Figure 2-12 : (a) Problème d'optimisation (b) optimisation et plan des sections (c) profils (d) *B-Splines* (e) modèle final (tirée de Chang et *al.* [48]).

2.4.3 Interprétation par approximation géométrique

Moins complexes que les méthodes précédentes, l'interprétation d'un modèle optimisé en utilisant des primitives (forme simple généralement 2D telle que le carré, le triangle, le cercle, etc.) consiste à faire correspondre les frontières et les singularités de la forme optimisée avec une forme géométrique simple. Ceci s'effectue directement à partir du modèle optimisé par sélection, projection 2D, extraction, puis approximation avec une forme simple de la singularité à représenter [49]. Cette approche est en fait une adaptation en 3D du modèle 2D introduit par Lin et Chao [50] pour le traitement d'images.

En effet, comme proposé par les auteurs, pour créer une primitive 2D, une forme générique et convexe est dessinée, puis la distance et l'angle entre un point de référence à l'intérieur de la forme et sa frontière sont mesurés. Ceci est répété pour tous les points de la frontière de la primitive pour différentes valeurs de l'angle. Une carte polaire de la forme peut alors être représentée graphiquement comme le montre la Figure 2-13.

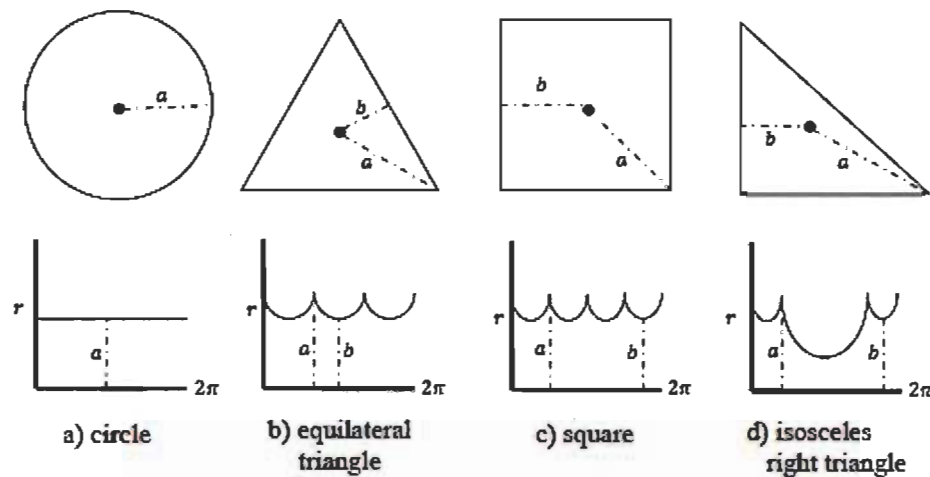


Figure 2-13 : Cartes polaires de quelques primitives (tirée de Lin et *al.* [50]).

Le choix de la primitive adéquate pour faire correspondre la forme approximée peut se faire à l'aide du schéma d'erreurs développé par Blattmann et *al* [51]. Ce schéma classe les primitives par ordre croissant de complexité et donne par le fait même un critère de choix au concepteur (voir illustration Figure 2-14). Il reste néanmoins à noter que ce dernier est libre de concevoir des primitives et les cartes polaires correspondantes en fonction du niveau de complexité de la pièce qu'il voudrait représenter.

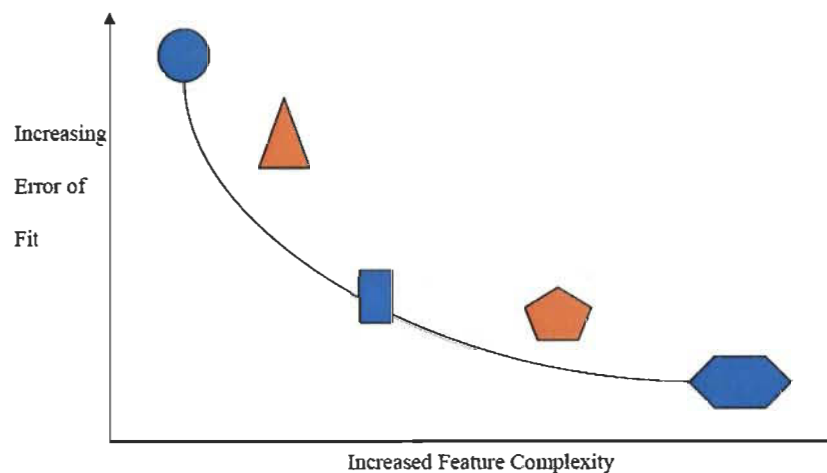


Figure 2-14 : Critère de choix d'une primitive (tirée de Blattman et *al.* [51]).

Le modèle solide est obtenu par approximation des contours et singularités avec des primitives. Le principe consiste à sélectionner manuellement les nœuds des frontières et des singularités, les projeter dans l'espace 2D sous forme de nuage de points, faire une approximation du nuage et dessiner la carte polaire correspondante. Cette carte est ensuite comparée avec celle des formes simples pour choisir la plus appropriée. Le processus détaillé, illustré sur la Figure 2-15, est le suivant :

- a. Problème d'optimisation
- b. Résultat triangulé
- c. Sélection manuelle des nœuds des singularités
- d. Surface sélectionnée
- e. Projection du nuage de points de la surface
- f. Approximation des points du nuage
- g. Point de référence et carte polaire
- h. Comparaison de la carte des primitives
- i. Choix de la primitive triangle
- j. Choix de la primitive quadrilatère
- k. Choix de la primitive pentaèdre
- l. Choix de la primitive la plus adéquate

Cependant, cette méthode semi-automatique est difficile à généraliser en 3D, étant donné que des primitives en 2D peuvent donner lieu à une multitude de formes en 3D, en plus des possibilités de combinaison. Des sections sont également à prévoir dans le cas où l'on aurait par exemple des trous non débouchant. De plus, le modèle solide obtenu semble plus facile à manipuler, contrairement aux données non intuitives (vecteur nœud, poids, points et polygone de contrôle, etc.) des B-Splines. En outre, le fait de devoir créer des primitives en fonction de la complexité du modèle à approximer constitue une des faiblesses de la méthode en raison de sa difficulté d'adaptation et d'automatisation en 3D.

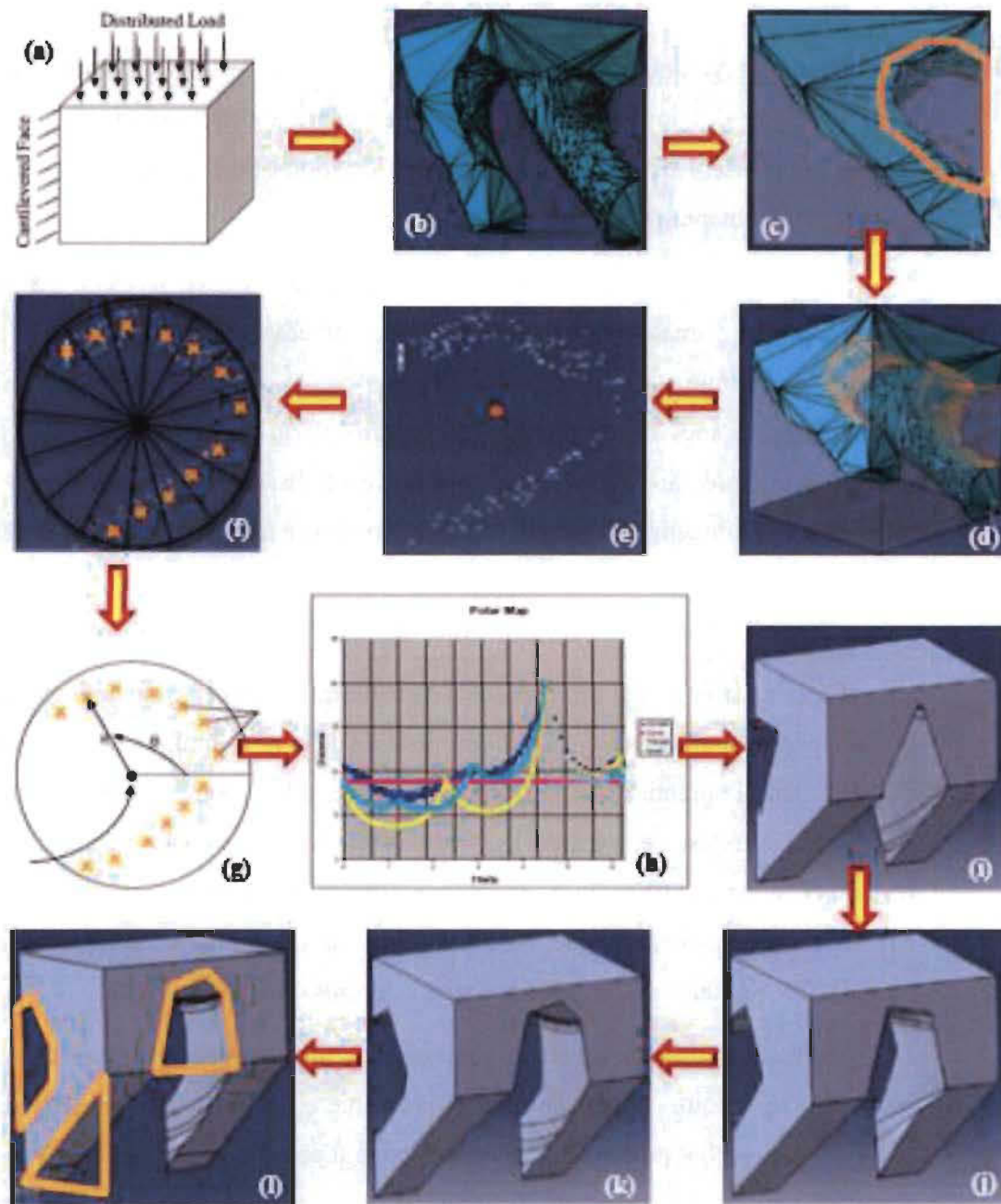


Figure 2-15 : Interprétation d'un résultat d'optimisation par des primitives (tirée de Larsen et *al.* [49]).

Chou et *al.* [52] dans leurs travaux ont recommandé de remplacer les caractéristiques géométriques évaluées pour effectuer les correspondances avec les primitives, par des formes polygonales en première approximation des trous dans le modèle optimisé. On procède ensuite à l'optimisation géométrique du modèle paramétrique obtenu.

Dans le même ordre d'idée, Papalambros et *al.* [6], en utilisant les techniques d'interprétation d'images en 2D, ont proposé un processus de conception en 3 modules. Le premier module est celui de l'optimisation par la méthode d'homogénéisation. Le résultat obtenu, sous forme d'image en niveaux de gris, est transféré dans le second module d'interprétation dans lequel le modèle est lissé, puis la frontière et les trous internes sont paramétrés à l'aide des formes simples (exemples : triangles et cercles). Le processus se termine au dernier module qui consiste en l'optimisation géométrique et paramétrique du résultat obtenu à la sortie du second module.

Chirehdast et *al.* [8] ont procédé à l'amélioration de cette méthode en faisant une claire séparation entre les résultats d'optimisation de type volumique et ceux composés de poutres. Dans le premier cas, la frontière et les trous du modèle optimisé sont détectés sous forme d'arêtes. Ces derniers sont par la suite lissés et transformés en *B-Splines*. Le résultat est donc remaillé afin de procéder à l'optimisation paramétrique. Dans le second cas, ils proposent d'extraire le squelette de la forme optimisée, de le convertir en un modèle géométrique et enfin de procéder à l'optimisation géométrique.

L'idée d'utiliser le squelette pour reconstruire un modèle optimisé composé de poutres a été, à notre connaissance, pour la première fois introduite par Bremicker et *al.* [7]. Ces derniers ont proposé, après optimisation topologique, de procéder à un seuillage afin d'obtenir un résultat binaire solide-vide. L'axe médian, squelette de ce résultat qui permet de saisir ses caractéristiques géométriques, est extrait et élagué de façon à avoir une représentation plus affinée. Le modèle est enfin reconstruit sous forme de lignes droites suivant un ensemble de règles précises, comme l'illustre la Figure 2-16.

Toutefois, les mêmes remarques que celles formulées précédemment demeurent. En effet, ces techniques sont limitées aux modèles 2D. De plus, elles nécessitent l'application d'une nouvelle optimisation, soit l'optimisation géométrique, qui est en soi une méthode d'optimisation de formes. Dans le cas particulier des structures composées de poutres, on constate que le potentiel de fabrication est pris en compte dans la transformation en modèle CAO, mais qu'aucune validation du modèle reconstruit n'est effectuée.

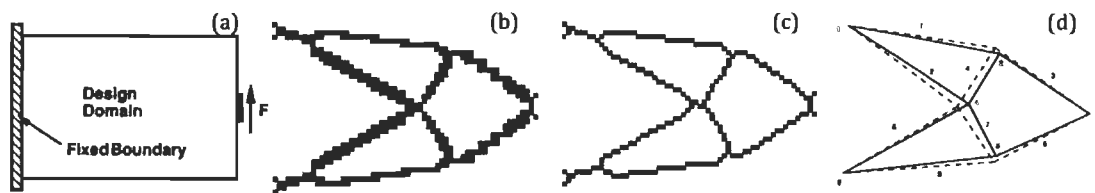


Figure 2-16 : Interprétation d'un modèle optimisé à l'aide du squelette. (a) Problème initial, (b) solution optimisée, (c) squelette (axe médian) et (d) modèle reconstruit avec 8 bars (tirée de Bremicker et *al.* [7]).

2.5 Reconstruction de modèles en ingénierie inverse

L'ingénierie inverse ou la rétro-ingénierie est le processus par lequel on retrouve le modèle 3D d'un objet à partir de sa représentation discrète. Elle étudie un objet pour en déterminer le modèle, le fonctionnement et les procédés qui ont servi à sa création. La reconstruction du modèle par ingénierie inverse s'effectue généralement à l'aide de quatre éléments : un maillage du modèle, un processus de segmentation dudit maillage, l'extraction de primitives à partir des éléments segmentés et finalement des opérations booléennes pour assembler le modèle final [53-55]. Le maillage est obtenu après acquisition des données sous forme de nuage de points à l'aide, le plus souvent, de scanners 3D.

La segmentation est l'une des étapes les plus importantes de la reconstruction de modèle en ingénierie inverse [56]. C'est un processus géométrique qui consiste à décomposer un modèle en différentes parties. Le but est de partitionner un maillage initial en sous-maillages qui le constituent. L'interprétation du maillage est grandement liée à l'application visée. Ceci amène à une décomposition en carreaux de surface ou encore

patches, ou en parties significatives ou volumiques. Le type de surface (exemples : sphère, cylindre, cône), les nœuds caractéristiques du squelette et la distance géodésique, la saillance, la planéité, la convexité, l'angle dièdre (angle entre deux triangles adjacents) pour détecter les arêtes vives et la courbure pour distinguer les régions sont autant de critères qui peuvent être utilisés pour segmenter un maillage en *patches*. D'un autre côté, la segmentation en parties significatives peut être considérée comme la décomposition naturelle des objets réalisée par la perception humaine. Les méthodes de segmentation trouvent également leur application dans le tatouage numérique (dépôt des marques d'identification sur un modèle 3D), la simplification (réduction du nombre d'éléments du maillage d'un objet tout en préservant sa topologie) et l'imagerie médicale (détection de certains points, lignes ou surfaces sur un scan). Un état de l'art des méthodes de segmentation peut être retrouvé dans [57], et un processus de reconstruction du modèle 3D à partir du maillage est présenté sur la Figure 2-17.

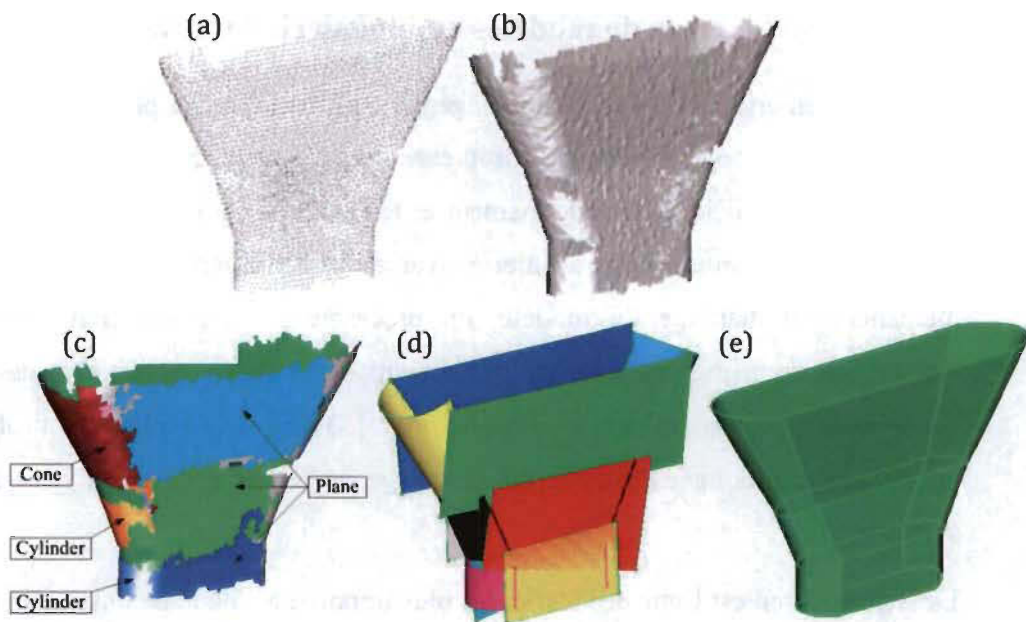


Figure 2-17 : (a) Nuage de points du modèle, (b) triangulation, (c) segmentation (d) correspondance des surfaces et (e) modèle reconstruit (tirée de Wang et al. [55]).

Des sections peuvent également être effectuées directement sur le maillage. Les profils ainsi extraits sont utilisés pour générer le modèle solide par balayage [58, 59] ou par application d'opérations géométriques, notamment l'extrusion et la révolution [60] (voir illustration Figure 2-18). Toutefois, des sections indésirables apparaissent durant le processus, dû entre autres au bruit, à la densité inégale du maillage ou lorsqu'on se trouve aux extrémités d'un groupe de sections. De plus, le retrait de ces sections non désirées se fait manuellement [58], ce qui rend la méthode semi-automatique. Les méthodes qui utilisent les profils résultant des sections ont l'avantage de générer le modèle solide avec des courbes et des surfaces qui épousent la forme du modèle optimisé.

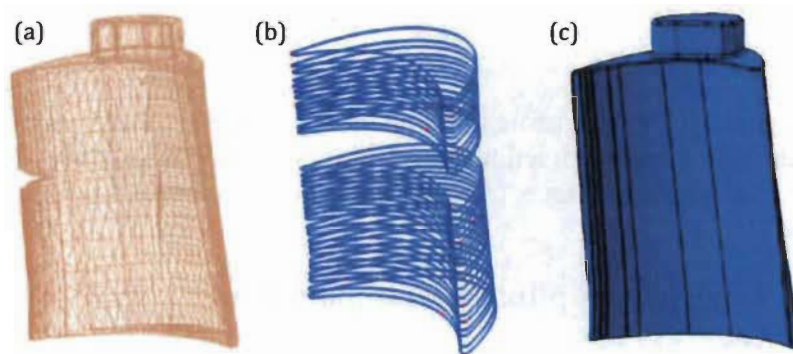


Figure 2-18 : Reconstruction d'un élément aérodynamique (*AirFoil body*). (a) Génération du maillage à partir du nuage de points du scan, (b) profil des sections et (c) balayage (tirée de Goyal et *al.* [59]).

Une méthode hybride frontières et primitives géométriques permettant l'extraction de primitives par analyse de la forme de l'espace 3D local (courbure discrète, *Gauss map* i.e. transformation de la normale à une surface en un point sur la sphère unité), puis la conversion en modèle solide de la triangulation du modèle a été appliquée par certains auteurs pour la reconstruction d'un modèle B-REP (*Boundary Representation* ou encore représentation d'un modèle par ses frontières) [54, 61]. La Figure 2-19 donne une illustration du résultat obtenu.

Cependant pour la plupart de ces méthodes, la topologie du modèle est connue *a priori*, ce qui n'est pas forcément le cas pour les formes optimisées topologiquement. Aussi, ces méthodes prennent en entrée un maillage (souvent à forte densité de nœuds), qui est moins riche en informations que le résultat brut de l'optimisation. Elles requièrent un modèle optimisé lissé de manière à faire une analyse adéquate du maillage.

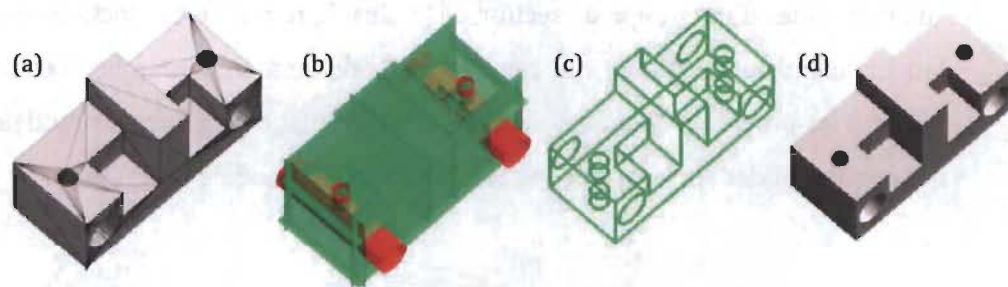


Figure 2-19 : Reconstruction d'un modèle avec les primitives plans et cylindres. (a) Maillage 3D, (b) extraction des primitives géométriques (6 cylindres et 16 plans), (c) reconstruction et (d) modèle final obtenu (tirée de Bénéière et al. [61]).

2.6 Logiciels d'optimisation topologique

Utiliser les méthodes d'optimisation topologique est une pratique assez répandue dans le milieu industriel. Des logiciels ont été développés à cet effet afin de faciliter le travail de l'ingénieur et de donner des structures optimisées dès la phase de conception. Au-delà des programmes qui le composent, un logiciel nécessite des fichiers pour rendre ces derniers opérationnels. La majorité des méthodes d'optimisation topologique utilisées sont les méthodes ESO et SIMP. Les critères d'optimisation sont respectivement la contrainte de Von Mises et la densité du matériau. Les résultats obtenus pour la plupart sont des isosurfaces (surfaces isodensité ou isocontrainte).

Plusieurs solutions commerciales et gratuites ont été proposées afin d'intégrer de manière automatique un processus d'optimisation topologique lors de la conception. On distingue des solutions proposant uniquement une boîte à outils (*toolbox*) d'optimisation topologique (*TOPO4ABQ*, *Topostruct*) et celles possédant un module d'optimisation et donnant des formats de fichier (exemple STEP ou IGES) transférables vers un logiciel

CAO (exemples : *ProTop*, *CATOPO*). On distingue également les solutions intégrées dans un logiciel de CAO dont les plus populaires sont : *OptiStruct*, module d'optimisation de *Altair HyperWorks* [62, 63], et *TOSCA Structure* de *FE Design* [64, 65], racheté par *Dassault Systèmes* en avril 2013 pour améliorer son module *ATOM* (*Abaqus Topology Optimization Module*). À ceux-ci se rajoutent *DesignSpace* de *Ansys*, *Within Labs* d'*Autodesk* et *Inspire* de *SolidThinking*.

Altair est actuellement l'un des pionniers dans la proposition de solutions innovantes intégrant l'optimisation topologique par la méthode SIMP. Dans le cas spécifique de leur module *OptiStruct*, des contraintes de fabrication ont été intégrées au processus d'optimisation topologique afin de faciliter l'interprétation de la forme optimisée après extraction de l'isosurface et de garantir l'obtention de structures fabricables par soustraction de matière [2, 66, 67]. Il s'agit notamment des contraintes sur les dimensions maximales ou minimales (*Maximum or minimum member size*) d'un élément du résultat, de l'orientation ou une direction privilégiée (*Draw direction/Extrusion constraint*), des possibilités de répétition et de symétrie (*Pattern grouping/repetition*), ou alors d'une combinaison de ces contraintes (voir illustration Figure 2-20). Cependant, des contraintes plus subjectives telles que l'accessibilité de la pièce ou son aspect, moins évidentes à formaliser, sont plus difficiles à intégrer [68].

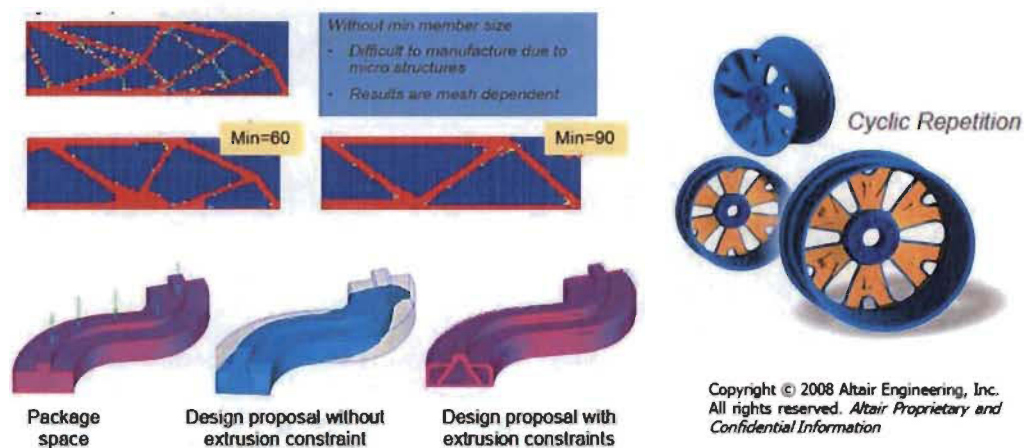


Figure 2-20 : Illustration des contraintes de fabrication (tirée de [69]).

Pour ce qui a trait au module *ATOM* de *Dassault Systèmes*, ce dernier préconise un post-traitement d'optimisation topologique. La valeur de l'isodensité choisie a une grande influence sur la silhouette de la solution finale. Augmenter cette valeur rapproche la surface vers l'intérieur du modèle, causant une diminution de volume. Par défaut, l'isovaleur dans le logiciel est $= 0,30$. Du côté de *TOSCA Structure* de *FE Design* (maintenant intégré dans *ATOM*), l'isodensité est d'abord extraite. Ensuite les nœuds de la surface du modèle sont approximés à l'aide d'une forme géométrique tels qu'une ligne, un arc ou une *spline* et le modèle est redessiné. Ce processus hybride combine à la fois le découpage isovaleur et l'approximation géométrique des frontières. Ceci permet d'obtenir une enveloppe proche de celle du modèle optimisé et d'avoir les détails et les singularités sous forme géométrique (voir illustration Figure 2-21).

Une liste plus exhaustive des différents logiciels d'optimisation topologique commerciaux ou gratuits actuellement présents sur le marché peut être retrouvée dans [70]. Il est important de mentionner que cette étude s'est limitée, dans le cas des logiciels, uniquement à leur module d'optimisation topologique.

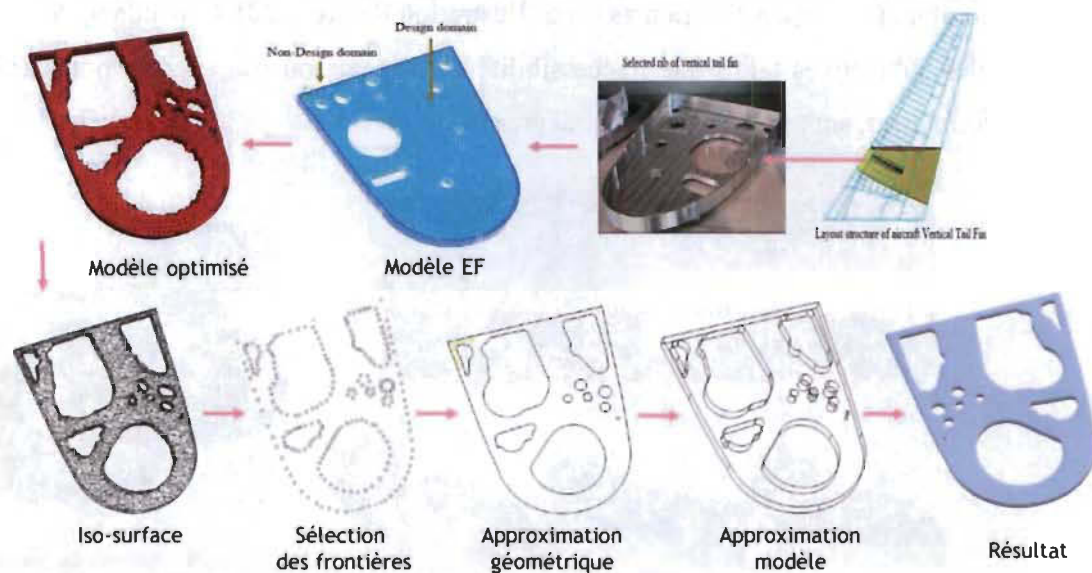


Figure 2-21 : Optimisation topologique à l'aide du logiciel TOSCA (tirée de Saleem et al. [64]).

À notre connaissance, *TOSCA Structure* est la seule solution commerciale actuelle qui prend en compte un raffinement adaptatif du maillage durant le processus d'optimisation topologique [67]. Le raffinement s'effectue en trois étapes : détecter la zone à raffiner à partir d'un calcul d'erreurs, procéder au raffinement de la zone cible et enfin, définir la limite volumique maximale des éléments à raffiner. La zone à raffiner est généralement la frontière du résultat d'optimisation topologique. Le raffinement s'effectue à l'aide de primitives prédéfinies comme le présente la Figure 2-22.

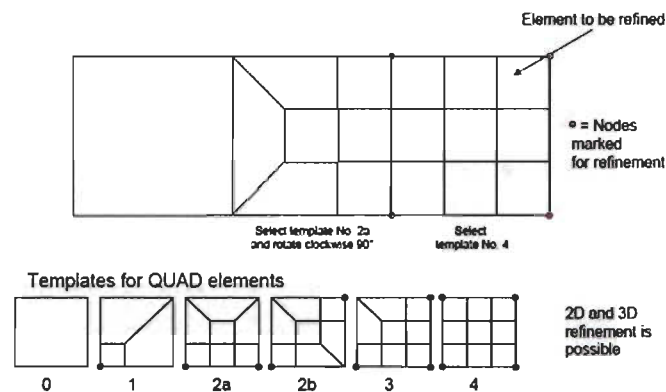


Figure 2-22 : Primitives et exemple de raffinement (tirée de Allinger [71]).

2.7 Vers une nouvelle méthode d'interprétation

L'évolution de l'outil informatique et la conception de différents logiciels commerciaux et libres permettant l'optimisation topologique des structures montrent l'intérêt de ce projet et son potentiel dans le milieu industriel. Comme mentionné dans la section 2.3, les méthodes d'optimisation topologique peuvent être regroupées en deux grandes classes en fonction de leur principe. On distingue donc les techniques qui distribuent de la matière dans un volume et celles qui déplacent les frontières du volume. Toutefois, une fois le modèle optimisé, ce dernier ne peut être utilisé tel quel dans la suite du processus de conception. En effet après l'optimisation, deux choix s'offrent au concepteur (voir illustration Figure 2-23). Le premier est de modéliser manuellement la forme optimisée dans un logiciel de CAO et valider le modèle obtenu par analyse par éléments finis. Le second choix commence par un post-traitement (exemple du lissage lors

de l'optimisation par la méthode SIMP) de la forme optimisée. Le résultat obtenu est finalement transformé en utilisant une méthode d'interprétation (voir section 2.4).

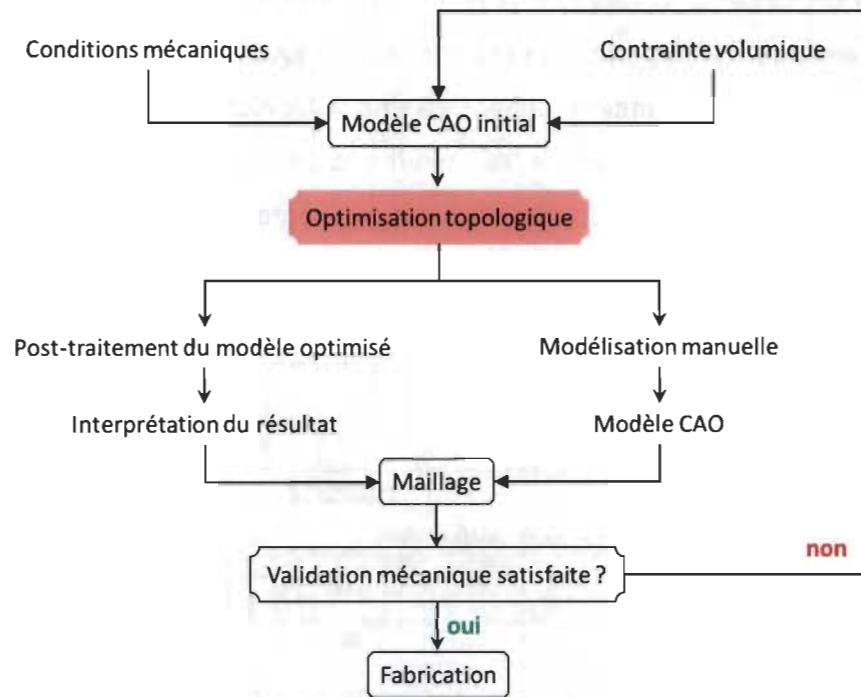


Figure 2-23 : Schéma du processus actuel de conception par la méthode SIMP.

2.7.1 Limites des méthodes d'interprétation actuelles

Dans ce projet qui s'inscrit dans une logique d'automatisation des tâches de l'ingénieur, l'interprétation manuelle d'un résultat d'optimisation n'est pas envisageable. De fait, cette dernière est longue et fastidieuse. Elle se poursuit tant que le résultat n'est pas conforme aux exigences du cahier des charges et, en procédant de la sorte, est quelque peu semblable au processus d'essais-erreurs. À ceci s'ajoute le fait qu'elle nécessite l'intervention du concepteur et qu'elle peut aboutir à une forme finale éloignée de la forme optimisée issue du processus d'optimisation.

D'un autre côté, les méthodes d'interprétation des résultats d'optimisation topologique peuvent être regroupées en deux grandes classes. La première donne l'enveloppe du modèle sous forme de courbes et surfaces paramétriques, et la seconde

donne une enveloppe sous forme géométrique où une approximation en formes simples (ou primitives) des frontières et singularités du modèle a été effectuée. Toutefois, ces méthodes sont confrontées à une variété de problèmes et les résultats ne donnent pas encore entière satisfaction. En effet, ces méthodes sont semi-automatiques, ce qui réduit leur efficacité. Que ce soit pour le choix du nombre et la direction des sections, le choix des profils indésirables (à supprimer) ou la sélection des nœuds des singularités à projeter, une et parfois plusieurs interventions de l'opérateur sont requises. Son expérience devient un facteur important lors de l'interprétation. De plus, au-delà de leur différence dans la qualité visuelle des résultats, les modèles de la première classe de méthodes sont peu réalisables par les procédés traditionnels de fabrication, tandis que la deuxième classe de méthodes utilise des primitives difficiles à généraliser en 3D. Plus encore, dans la majorité des méthodes actuelles, le modèle converti n'est pas validé.

Ce projet propose un autre choix au concepteur, une alternative qui consiste à interpréter automatiquement le modèle optimisé en modèle CAO fabricable par des procédés traditionnels (en opposition à la fabrication additive). Il permet le passage de la modélisation d'un problème dans un logiciel de CAO à un modèle solide optimisé, ouvrant par conséquent la voie à une optimisation globale du processus de conception. Il propose tout d'abord une méthode d'amélioration de la qualité de l'enveloppe de la forme optimisée, suivie de la conversion et de la validation automatiques du modèle.

2.7.2 Méthodologie proposée

Rappelons que ce travail vise à interpréter sous forme de modèles CAO les résultats d'optimisation topologique qui s'orientent vers des structures composées de poutres. Le principe de l'approche d'interprétation développée est illustré sur la Figure 2-24. Une rapide comparaison avec la Figure 2-23 permet de positionner nos travaux vis-à-vis des techniques actuelles. Ce travail propose deux grandes phases qui aboutissent à l'obtention d'un modèle CAO après optimisation topologique. D'abord on améliore la solution optimisée à travers plusieurs adaptations du maillage : c'est l'optimisation topologique

adaptative. Il s'ensuit une conversion en modèle CAO de la forme optimisée adaptée. Le modèle converti est finalement validé par une analyse par EF.

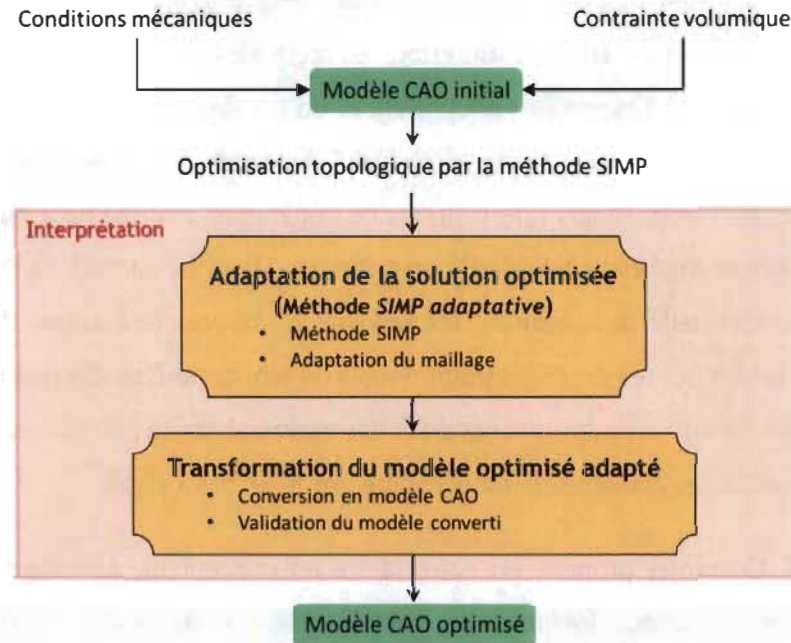


Figure 2-24 : Principe général de l'approche d'interprétation développée.

Les principales étapes de l'optimisation topologique adaptative sont présentées sur la Figure 2-25. Après avoir discrétisé uniformément le domaine avec des éléments finis tétraédriques, une optimisation par la méthode SIMP est effectuée. Le résultat est une répartition de la densité dans les éléments finis du modèle. La variation de cette densité dans le modèle est ensuite évaluée à l'aide du gradient de densité. Le gradient permet de déterminer les zones de grandes variations de la densité, c'est-à-dire l'interface entre la matière pleine et le vide. Par la suite une carte de taille est construite suivant une fonction d'adaptation (raffinement et déraffinement adaptatifs) dépendante de la distribution de la norme du gradient de la densité. Le raffinement consiste à augmenter localement le nombre d'éléments du maillage afin d'obtenir une meilleure distribution de la densité. Il devient adaptatif dans le sens où le remaillage ne s'effectue que dans des zones ciblées, tout en déraffinant le reste du maillage. Le déraffinement s'effectue à la fois dans les

parties entièrement solides et complètement vides où il n'est pas nécessaire d'avoir une grande précision d'information. Cette méthode a été baptisée *SIMP adaptative*, qui est la méthode SIMP avec adaptations du maillage.

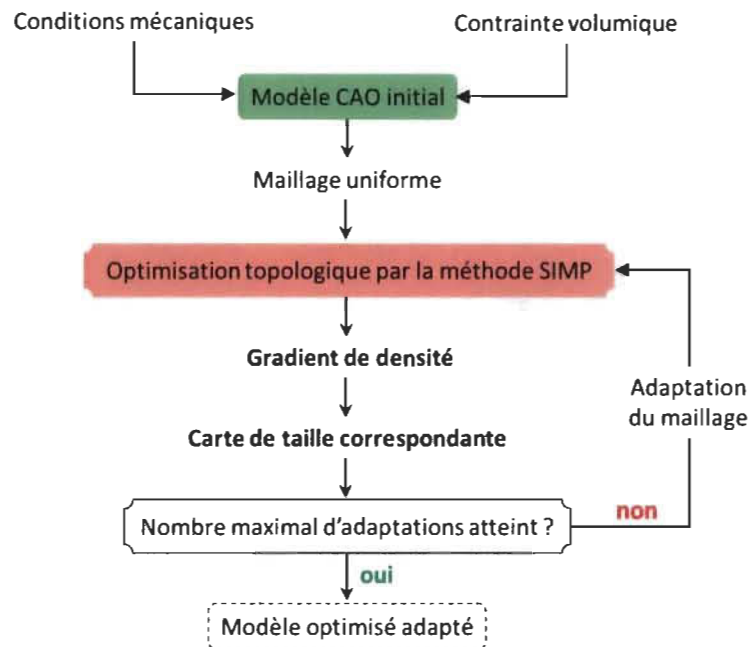


Figure 2-25 : Schéma du principe de la méthode SIMP adaptative.

Une fois le modèle optimisé adapté, ce dernier est lissé afin de régulariser la forme des triangles de son enveloppe. Le lissage dans ce contexte a pour but de faciliter l'extraction du squelette [72]. Le modèle optimisé adapté est converti à partir de la triangulation obtenue par lissage uniquement du sous-domaine optimisé, la partie non optimisée restant intacte. Cette dernière n'a justement pas été optimisée, et n'a donc pas besoin d'être convertie. De plus, elle représente très souvent les parties fonctionnelles du modèle et est le siège d'application des chargements et conditions aux limites. Comme présenté dans l'algorithme de conversion sur la Figure 2-26, le squelette de la triangulation est tout d'abord obtenu sous forme de segments (courbe-squelette [73]). Les informations sur les caractéristiques géométriques desdits segments sont également extraites. Un processus de normalisation, qui transforme les morceaux de segments en des poutres

droites, est appliqué. On obtient donc un modèle CAO sous forme d'un assemblage de poutres. Ce dernier est constitué d'une partie filaire sous forme de poutres provenant du sous-domaine optimisé et d'une partie volumique restée sans modification durant tout le processus. On en déduit le modèle EF 1D-3D découlant en raccordant les poutres du squelette (partie en 1D) à la partie non optimisée (partie volumique ou de *non-design*, en 3D). Une validation par une étude multidimensionnelle par éléments finis du modèle converti est finalement effectuée.

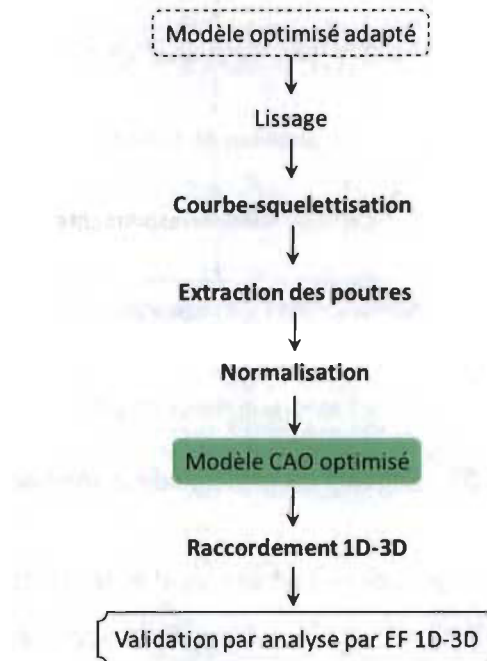


Figure 2-26 : Schéma du principe de la conversion et de validation.

2.8 Présentation des outils de la méthodologie

La méthodologie proposée fait intervenir les méthodes de raffinement adaptatif, de lissage et de squelettisation qui sont bien documentées dans la littérature. En effet, l'on sait désormais que l'optimisation topologique est une technique itérative qui allège la structure en déterminant son encombrement minimal et ce, sans nuire à ses performances. Attendu que ce projet vise à construire des structures de poutres, il est légitime de

s'intéresser aux méthodes de squelettisation afin d'utiliser les points pertinents du squelette comme base de la conversion du modèle optimisé. Cependant, ces méthodes étant extrêmement sensibles au bruit, un post-traitement du maillage du résultat est nécessaire pour régulariser l'enveloppe du modèle avant la conversion.

Après avoir, dans les sections précédentes, présenté une revue de la littérature des méthodes d'optimisation topologique et des méthodes qui transforment un résultat d'optimisation topologique en un modèle CAO, cette partie traite de l'état de l'art des méthodes de raffinement, de lissage et de squelettisation, qui sont les principaux outils utilisés dans cette recherche.

2.8.1 Méthodes de raffinement de maillage

Lors de la résolution d'un problème physique par la méthode des éléments finis, la construction du maillage associé à la géométrie du domaine considéré est une étape cruciale qui est d'autant plus délicate que la qualité de la solution en dépend fortement. Par conséquent, le maillage construit doit satisfaire des impératifs liés notamment à la qualité, la géométrie, au respect d'une carte de taille et à la qualité de solution requise pour le problème considéré : on parle alors de maillage adaptatif. Avec les avancées technologiques majeures dans le domaine informatique, les maillages ont pris une place de plus en plus prépondérante dans la représentation numérique d'objets.

Comme présenté dans la section 2.2, un maillage est une partition d'un domaine à l'aide d'éléments finis ou mailles. Il peut être structuré (multiples reproductions et empilement d'une maille élémentaire, souvent des hexaèdres) ou non structuré (éléments assemblés de manière quelconque, souvent des tétraèdres). Les méthodes par décomposition spatiale (générer la topologie du maillage et l'adapter à la géométrie du modèle), les méthodes de type Delaunay (créer des mailles suivant un critère) et les méthodes frontales (mailles créées itérativement à partir d'un front qui est au départ la frontière du domaine à mailler) sont les techniques de maillage les plus répandues. Une description plus exhaustive peut être retrouvée dans [74]. Les domaines d'application des

maillages sont entre autres la simulation numérique pour prédire ou vérifier des résultats, la résolution d'équations de la physique, la simulation des déformations, le traitement visuel des reliefs et leur texture (sciences de la terre), l'imagerie médicale (visualisation des données acquises par un scanner 2D ou 3D) et la reconstruction d'objets 3D.

Il existe **trois techniques** principales d'adaptation de maillage [74] : r , p et h . La méthode r **consiste à** améliorer une solution en déplaçant les nœuds du maillage vers certaines zones. Ce déplacement est effectué sans toutefois modifier la connectivité des nœuds existants ni en ajouter de nouveaux. La méthode p augmente le degré d'interpolation des éléments. Cette augmentation peut être appliquée à tout le maillage, ou seulement à des endroits précis, tout en gardant intacte sa topologie. Contrairement aux techniques précédentes, la méthode h consiste à raffiner le maillage par ajout de nœuds dans certaines zones du maillage, ou par création d'un nouveau maillage.

L'objectif du raffinement adaptatif est d'améliorer la qualité du résultat de l'optimisation sans pour autant perdre en efficacité. Pour ce faire, Maute et Ramm [40] dans leurs travaux effectués sur des modèles en 2D, ont proposé, après une optimisation par répartition de la densité de matière, d'extraire grossièrement (faible valeur de la **densité**) les isocontours, de raffiner entièrement le maillage obtenu, puis de procéder à l'optimisation topologique du nouveau modèle avec le même chargement et des conditions aux limites identiques à celles du problème initial. Ainsi, en diminuant à chaque fois la taille des éléments et en augmentant la valeur de la densité d'extraction de l'isocontour, plusieurs cycles d'optimisation sont effectués jusqu'à l'obtention de la qualité de résultat désirée (voir illustration Figure 2-27).

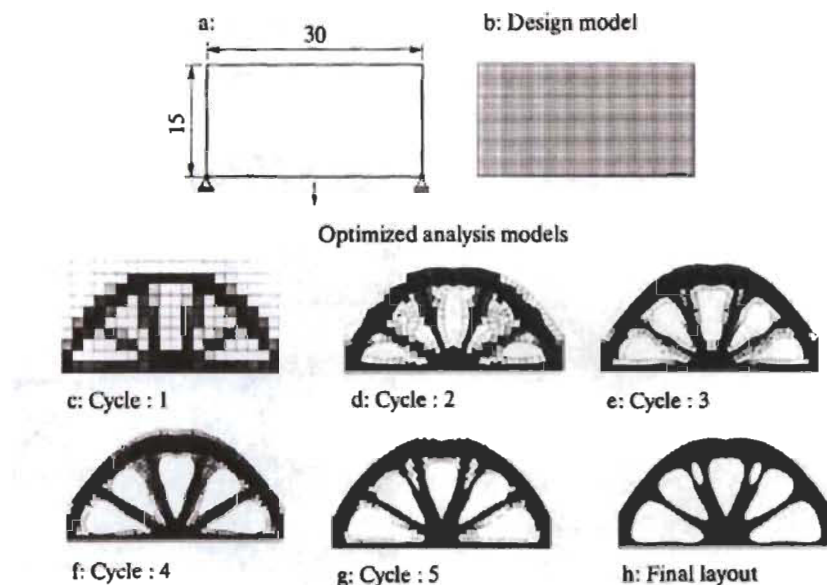


Figure 2-27 : Optimisation topologique avec raffinement (tirée de Maute et *al.* [40]).

De façon similaire, Costa et Alves [75, 76] ont proposé une stratégie de raffinement basée sur l'introduction des nœuds aux arêtes des éléments du maillage existant ainsi que des éléments dits de transition à l'interface entre les éléments caractérisés comme contenant de la matière et ceux considérés comme vides. Un processus de lissage *Laplacien* (voir sous-section 2.8.2) contraint est appliqué après chaque étape de raffinement afin d'améliorer la qualité des éléments du maillage avant l'optimisation suivante. Une illustration des résultats après deux cycles de raffinement est présentée sur la Figure 2-28. Cette figure montre également les éléments non conventionnels utilisés dans la zone de transition entre les éléments raffinés (partie solide et frontière structurelle) et les éléments grossiers.

Afin d'éviter le raffinement du modèle entier, Roman Stainko [77] fut un des premiers à envisager le remaillage des zones à l'interface entre les éléments considérés comme vides et ceux considérés comme contenant de la matière afin d'insérer les nouveaux éléments uniquement à cette interface. À cet effet, il a introduit une méthode de filtrage de la densité de matière permettant de détecter les éléments à raffiner et un rayon

de filtrage donnant une certaine liberté sur la taille de la zone à raffiner. Plus la valeur du rayon sera élevée, plus la zone à raffiner sera grande (voir illustration Figure 2-29).

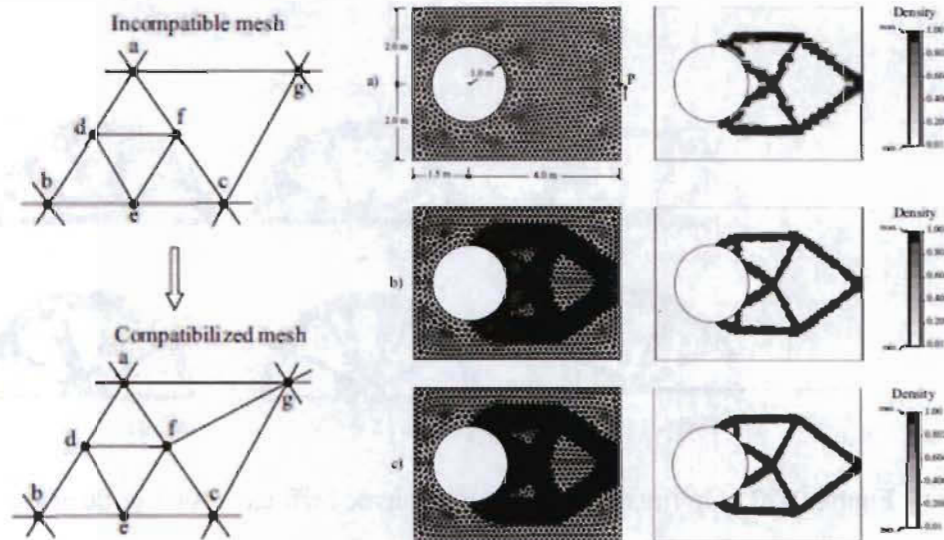


Figure 2-28 : Éléments de transition (à gauche) et cycles d'optimisation (à droite) (tirée de Costa et *al.* [75]).

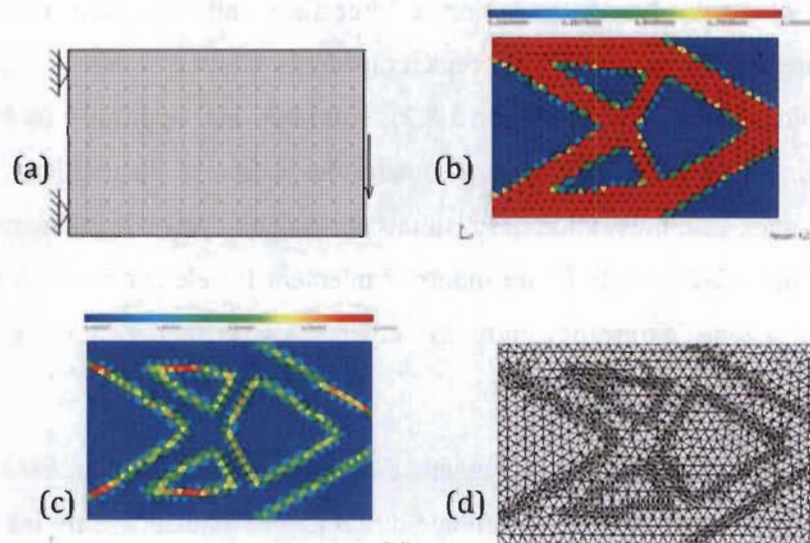


Figure 2-29 : (a) Problème initial, (b) solution grossière, (c) identification de la zone à raffiner et (d) raffinement d'une poutre cantilever (tirée de Stainko [77]).

De Sturler et *al.* [78, 79], dans leurs travaux, partent d'un maillage relativement grossier et préconisent l'utilisation d'un raffinement de maillage lorsque la variation de la compliance entre deux itérations est inférieure à un seuil et après un minimum de 5 itérations entre deux raffinements. Le raffinement est effectué en continu tout le long du processus d'optimisation. Tout élément de densité supérieure à la densité seuil, au même titre que les éléments à une distance fixe (r_{AMR} [79]) d'un autre élément déjà sélectionné, est raffiné. Les autres éléments du modèle, autrement dit ceux de densité inférieure à la densité seuil, sont déraffinés (voir illustration Figure 2-30).

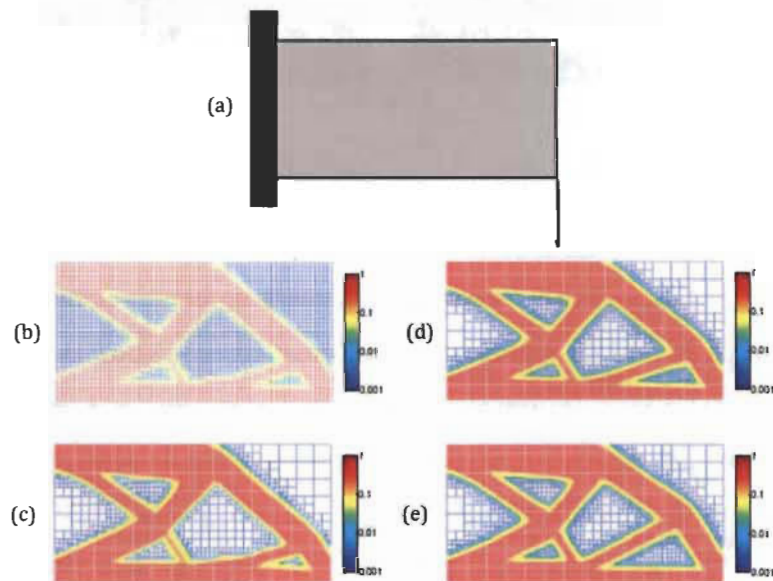


Figure 2-30 : (a) Problème initial, (b) solution grossière, (c)-(e) étapes de raffinement et déraffinement (tirée de Wang et *al.* [79]).

Une amélioration de ces travaux a été proposée par Bruggi et *al.* [80] en utilisant deux contrôles d'erreurs. Le premier contrôle d'erreur, celui sur la densité, permet de déterminer l'interface entre les éléments considérés comme vides et ceux considérés comme contenant de la matière. Le second est lié au résultat de l'analyse par éléments finis, et permet d'évaluer la qualité de la solution optimisée. Cette approche raffine à la fois la partie pleine de matière et l'interface matière-vide, et le déraffinement se limite à la zone contenant les éléments considérés comme vides, comme le montre la Figure 2-31.

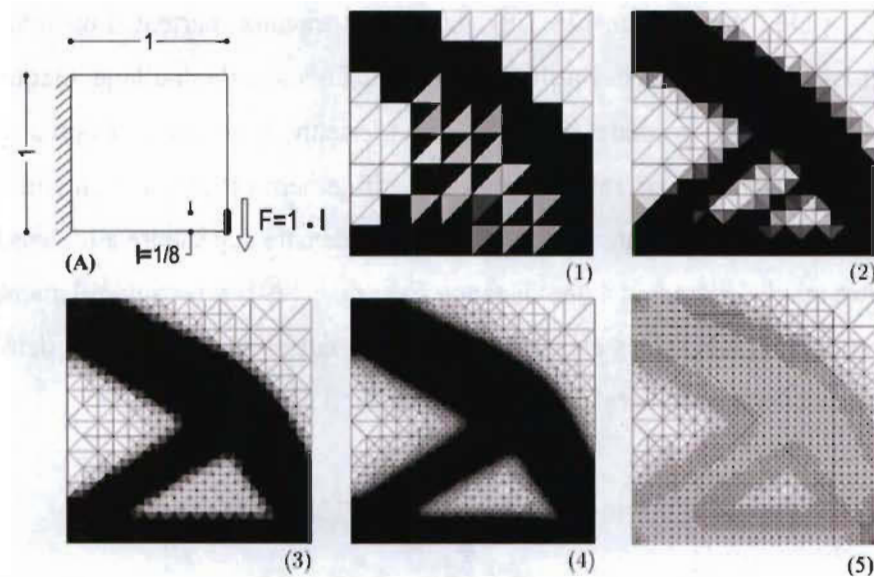


Figure 2-31 : (A) Problème initial, (1)-(4) étapes de raffinement et d'optimisation, et (5) maillage du résultat final (tirée de Bruggi et *al.* [80]).

Ces tentatives sont fructueuses jusqu'à un certain point seulement. En effet, elles sont pour **la** plupart appliquées sur des maillages 2D ou 3D structurés (quadrangles ou hexaèdres). Même les travaux récents de Wang et *al.* [81] restent limités aux maillages 2D triangulaires. Justement, ces derniers suggèrent de séparer la carte de densité (valeur de la densité en chaque nœud) et le maillage éléments finis (maillage du modèle optimisé). Cette carte de densité leur permet de détecter la zone grise de transition ou *Gray Transitional Region* [81, 82], **sans** toutefois modifier le maillage. Le processus de raffinement consiste alors à introduire des nœuds au milieu des arêtes pour les triangles et également au centre de l'élément pour les quadrangles et hexaèdres (voir illustration Figure 2-32) créant de ce **fait des** éléments finis non conventionnels, similairement à d'autres auteurs [75, 79, 82]. De plus, les valeurs de la densité servant de bornes de l'intervalle de transition sont retrouvées de façon empirique, ou fixées par l'opérateur (voir illustration des résultats sur la Figure 2-33).

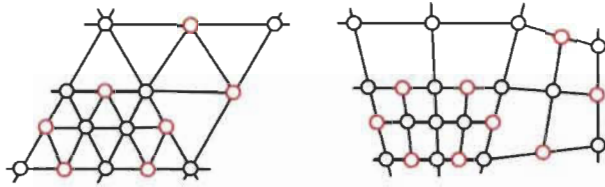


Figure 2-32 : Éléments de la zone de transition et de raffinement (tirée de Wang et *al.* [81]).

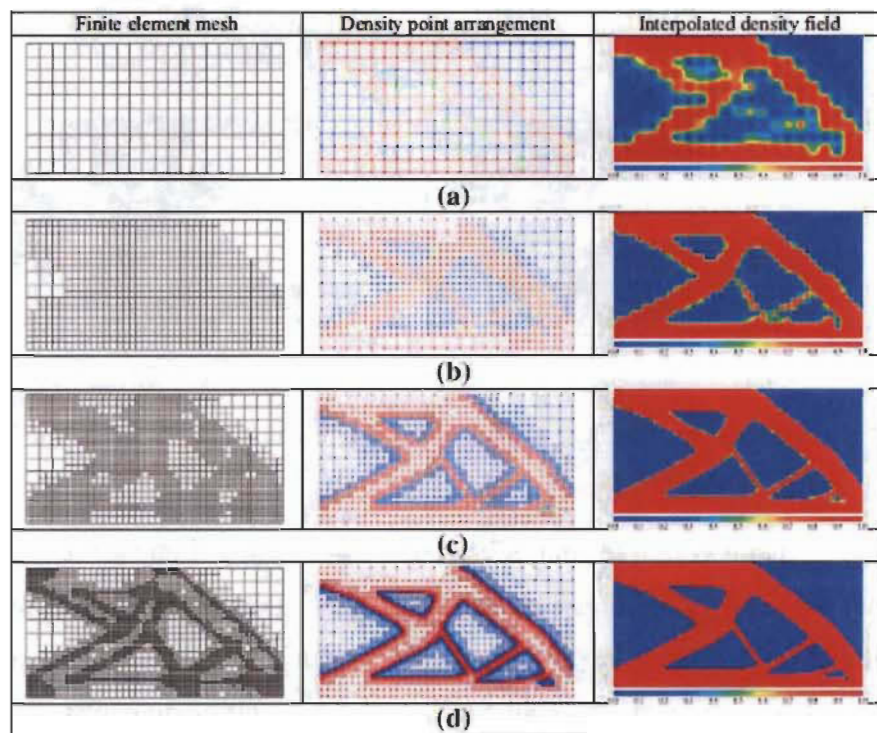


Figure 2-33 : (a) Maillage initial et résultat sans raffinement ; optimisation après (b) 1^{er}, (c) 2^e et (d) 3^e niveau de raffinement (tirée de Wang et *al.* [81]).

En utilisant la méthode d'homogénéisation, Lin et *al.* [83] ont proposé un processus d'optimisation en deux phases avec raffinement du résultat de l'optimisation. La première étape consiste en une optimisation topologique avec des mailles relativement grossières. Le résultat obtenu est, par la suite, projeté sur un maillage plus fin que le premier. Dans la solution, seuls les éléments de densité supérieure à une valeur seuil sont retenus ; les autres éléments sont alors considérés comme vides. Après détection de la frontière de la

solution, la nouvelle topologie obtenue constitue le nouveau problème d'optimisation et ce, avec les mêmes conditions mécaniques que le problème initial, comme présenté sur la Figure 2-34.

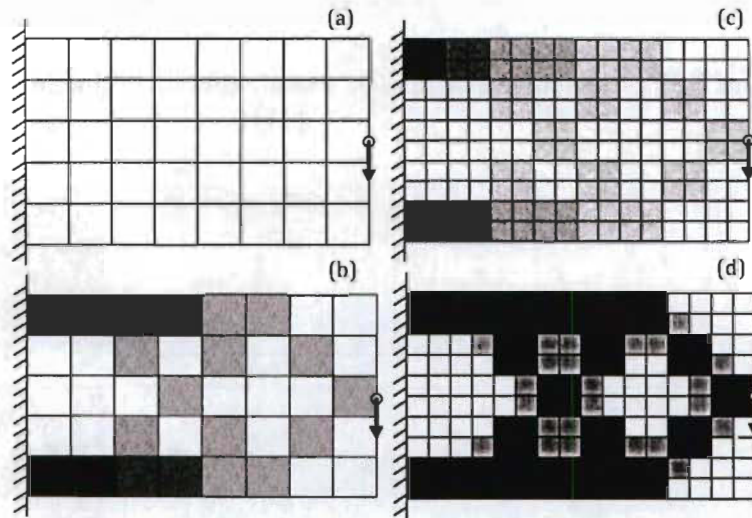


Figure 2-34 : (a) Problème d'optimisation, (b) résultat de la première optimisation, (c) projection sur un maillage raffiné et (d) modèle initial de la deuxième optimisation (tirée de Lin et *al.* [83]).

Aremu et *al.* [84] ont effectué des travaux de raffinement et de déraffinement sur des modèles optimisés par la méthode BESO. Après chaque processus d'optimisation, le résultat optimisé est raffiné puis déraffiné. En effet, après la première optimisation, le modèle est entièrement remaillé et adapté. L'adaptation du maillage s'effectue en quatre étapes successives que sont la sélection des éléments à raffiner, le raffinement, suivi du déraffinement et du lissage. Le raffinement est effectué en introduisant des nœuds au milieu des arêtes tout en respectant un seuil de taille minimale des éléments. Le déraffinement, quant à lui, consiste à supprimer les éléments dans la zone considérée comme vide. La qualité des éléments dont les voisins ont été supprimés est évaluée, puis lissée avec la méthode du *Laplacien* afin de garantir leur qualité (voir Figure 2-35).

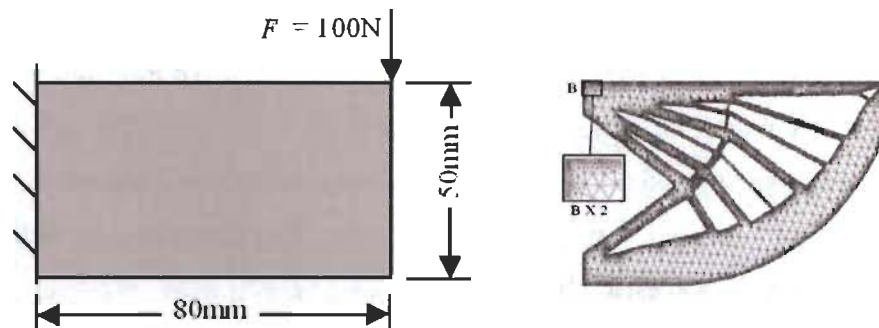


Figure 2-35 : (a) Problème initial et (b) résultat de l'optimisation avec raffinement (tirée de Aremu et *al.* [84]).

Duan et *al.* [85] ont effectué l'étude de la conception d'un conduit par optimisation topologique. Leur but était de déterminer la forme optimisée de la courbure du conduit qui connecte l'admission à la sortie d'une cavité en minimisant la dissipation, sous la contrainte d'occupation par le liquide de 40 % du domaine. Le résultat donne une distribution optimale de la perméabilité locale du milieu constante dans chaque élément du maillage : $\gamma = 0$ pour le milieu solide et $\gamma = 1$ si le milieu est liquide (voir illustration Figure 2-36). Après une première optimisation, les éléments du maillage sont classifiés pour le raffinement en fonction de leur position par rapport à l'interface solide-fluide. Seuls les éléments dans le voisinage de cette interface sont raffinés. Le maillage initial étant uniforme et grossier, le raffinement s'effectue après chaque processus d'optimisation et le déraffinement n'est pas pris en compte, comme le montre la Figure 2-36.

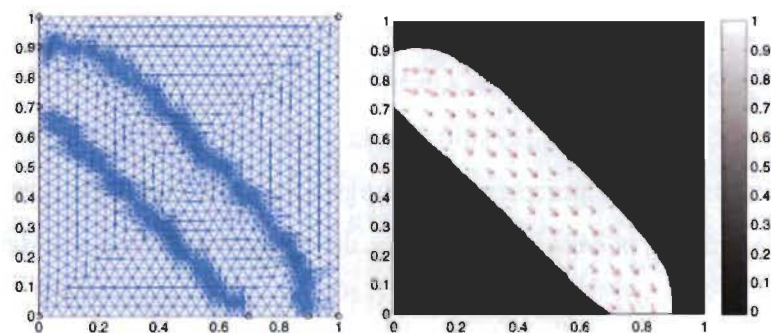


Figure 2-36 : Résultat optimisé de l'écoulement de fluide avec raffinement de maillage autour de la forme optimisée du conduit (tirée de Duan et *al.* [85]).

Un ensemble de méthodes d'adaptation de la qualité des résultats d'optimisation topologique afin d'en faciliter l'interprétation vient ainsi d'être présenté. En fin de compte, il apparaît que la majorité des méthodes de raffinement mentionnées ci-dessus sont limitées aux modèles 2D et, en conséquence, ne capturent que partiellement les problèmes réels qui sont pour la grande majorité en 3D. Le raffinement est soit limité à l'interface matière-vide, soit est appliqué sur tous les éléments considérés comme remplis de matière. Des éléments finis non conventionnels sont également introduits pour garantir une certaine transition entre les éléments grossiers et ceux raffinés. Plus encore, le déraffinement des éléments remplis de matière n'est pas pris en compte et dans les cas exceptionnels où le déraffinement des éléments vides est réalisé, ce dernier ne s'effectue pas simultanément avec le raffinement du maillage durant le processus d'amélioration de la qualité de résultats.

La géométrie d'un résultat d'optimisation topologique est inconnue *a priori*. L'extrême irrégularité de sa surface a poussé certains auteurs à la caractériser, notamment dans le cas des modèles en 2D, d'enveloppe en *zigzag* [82]. Une procédure de lissage est souvent préconisée dans ces cas, avant de continuer à exploiter le modèle.

2.8.2 Méthodes de lissage

À notre connaissance, le lissage trouve son origine dans les méthodes de traitement de signal sous la dénomination de filtrage (*filtering*), où le but était de supprimer les interférences encore appelées bruit (fréquences ou sons non désirables). Une image photographique étant le résultat de la projection d'un signal lumineux sur une surface photosensible, des processus de filtrage sous la dénomination de *débruitage* (*denoising*) ont été employés dans les techniques de traitement d'images et des résultats de scanners. Le but, cette fois, était de nettoyer les éléments parasites introduits lors du processus de formation de l'image ou du scan. Dès lors, lisser un maillage (*mesh smoothing*) peut être assimilé à la conception d'un filtre [86] ; le signal à filtrer pouvant être par exemple la variation de la courbure ou de la position locale d'un nœud.

Dépendamment des auteurs, on retrouve le lissage sous les appellations anglaises *smoothing*, *denoising*, *filtering*, *fairing*. Dans le cadre de son application, le bruit représente l'ensemble des fluctuations qui rendent la surface rugueuse à cause entre autres du dispositif d'acquisition (caméra, processus de scan), de l'environnement de travail (vibrations), de l'approximation par une surface polyédrique pour des raisons notables de calcul ou de la suppression de certains éléments lors du processus d'optimisation topologique.

David Field [87] est l'un des pionniers en ce qui a trait au lissage des maillages. Ce dernier appliqua la méthode itérative du lissage *Laplacien* sur une triangulation de Delaunay pour améliorer sa qualité tout en conservant au mieux le critère de Delaunay (aucun nœud d'un triangle n'est à l'intérieur du cercle circonscrit d'un des autres triangles). Le lissage *Laplacien*, essentiellement utilisé pour améliorer la qualité du maillage dans les techniques de raffinement adaptatif, consiste à déplacer les nœuds d'une triangulation vers le barycentre de son voisinage (voir illustration Figure 2-37). Il est appelé lissage *Gaussien* lorsqu'on tient compte de la position courante du nœud [88].

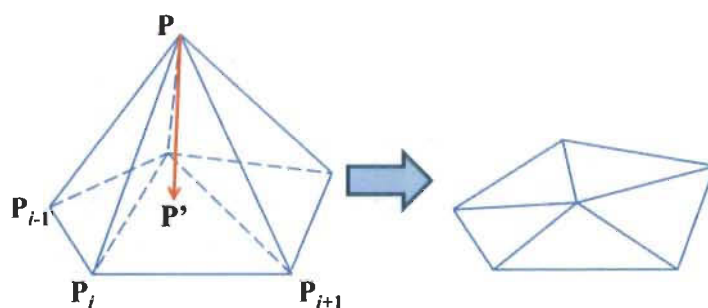


Figure 2-37 : Illustration du principe du lissage *Laplacien*.

Du fait de la diminution drastique du volume (voir illustration Figure 2-38b) et de la perte des caractéristiques géométriques ou parties saillantes du modèle (notamment des arêtes vives), Gabriel Taubin [88] fut parmi les premiers à contraindre cette variation volumique. Pour ce faire, il procède à l'application de deux procédures consécutives du lissage *Gaussien* pour chaque itération, chacune affectée respectivement des facteurs λ et

μ avec ($0 < \lambda < -\mu$). La première *pass*e du lissage réduit le volume pendant que la deuxième le rétablit (voir illustration Figure 2-38c).

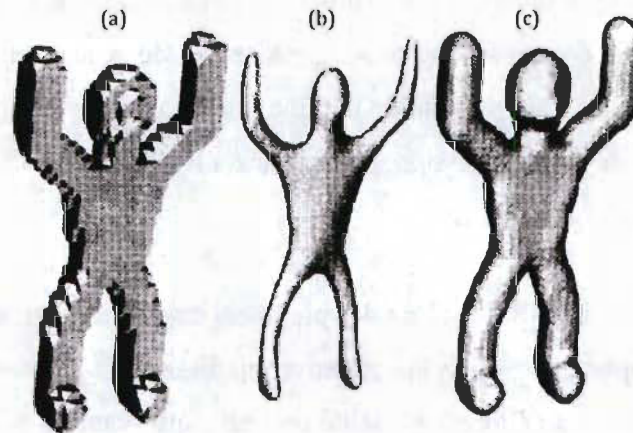


Figure 2-38 : Lissage de maillage : (a) isosurface à facettes, puis lissage (b) *Gaussien* et (c) *Taubin* (tirée de Taubin [88]).

La méthode *Laplacien* a été utilisée par bon nombre de chercheurs principalement en raison de deux atouts majeurs : sa simplicité et sa robustesse. C'est toujours dans le but d'éviter le rétrécissement de l'objet observé après plusieurs itérations que Desbrun et *al.* [89] ont proposé de pondérer le volume après chaque itération par un coefficient. Ce dernier dépend du volume initial et du volume réduit, et est appliqué après chaque itération afin d'assurer la constance du volume durant le lissage.

Vollmer et *al.* [90] ont suggéré d'atténuer ce rétrécissement volumique important causé par le *Laplacien* en ramenant, suivant une certaine distance, les nœuds lissés à leur position précédente. Suivant la même optique, certains ont suggéré de contraindre le volume en gardant inchangés les centroïdes des triangles [91, 92]. D'autres ont suggéré de coupler la conservation du volume avec des opérateurs de conservation de détails géométriques [93, 94], combinant ainsi les avantages des lissages qui conservent et ceux qui ne conservent pas les détails fins, tout en minimisant leurs inconvénients respectifs. Clark et *al.* [95] ont également proposé de déplacer un nœud vers le barycentre des centroïdes des triangles voisins, pondérés de la distance nœud-centroïde.

Comme mentionné précédemment, le lissage de type *Laplacien* malgré la bonne qualité des éléments obtenus, provoque une perte d'informations conséquente sur les parties saillantes telles que les arêtes vives de l'objet qui faciliteraient le recouvrement du modèle sous-jacent. C'est pourquoi, afin de détecter puis de préserver le maximum de détails géométriques durant le lissage, certains chercheurs ont assimilé le problème de lissage à un problème de minimisation de l'énergie interne. En fonction des auteurs, l'énergie pouvait être la courbure (exemple du déplacement du nœud suivant la direction normale et à la vitesse de la courbure moyenne discrète effectué par [89]), la variation de la position des nœuds (exemple de la classification des nœuds à partir des valeurs des courbures principales maximale et minimale en utilisant leur valeur de « netteté » ou *sharpness* locale par [96]), la normale à une face (exemple de l'utilisation de l'angle entre la normale et la normale moyenne à une face qui tient compte du voisinage, pondéré d'une fonction poids dépendante et également du coefficient de netteté local par [97, 98]), le déplacement du nœud suivant la normale (effectué notamment par [99]), ou encore tout autre attribut géométrique du maillage (voir illustration Figure 2-39). Une des difficultés majeures dans cette stratégie réside avant tout dans la différenciation entre un détail géométrique (par exemple, arête saillante à conserver) et le bruit (arête vive à lisser). À cet effet, des valeurs seuils doivent être définies par l'opérateur.



Figure 2-39 : (a) Modèle initial, (b) modèle avec 0,7 % de bruit Gaussien, puis lissage avec la méthode de (c) [96], (d) [99] et (e) [97] (tirée de Chen et al. [97]).

En outre, comme l'illustre la Figure 2-39, la plupart des maillages bruités utilisés pour valider ces méthodes proviennent des modèles initialement lisses. Le bruit proprement dit n'est que le résultat du processus de scan (dans le cas des nuages de points), du dispositif d'acquisition (dans le cas des images) ou alors de la perturbation uniforme des nœuds du maillage par injection d'un bruit généralement *Gaussien*. Plus encore, ces

méthodes donnent des résultats probants sur des modèles à topologie connue et se sont révélées inadéquates pour des modèles fortement *bruités* comme l'enveloppe du résultat brut de l'optimisation topologique [11]. En effet, comme le montre la Figure 2-40a, l'irrégularité de cette enveloppe résulte du processus de suppression ou de la désactivation de certains éléments du modèle afin de respecter les contraintes de conception. L'appellation de *bruit* utilisée pour qualifier cette enveloppe est un abus de langage, quoique très ressemblant à vue d'œil. En plus, la forme optimisée n'étant pas connue d'avance, les arêtes saillantes sont à détecter puis à conserver lorsqu'elles existent dans la solution optimisée, ou à créer durant le processus de lissage afin d'en faciliter la reconstruction. Ceci déjà justifie la nécessité d'une nouvelle méthode adaptée aux résultats d'optimisation et, en même temps, rend cet exercice complexe. De fait, tandis que d'un côté l'application sur un résultat optimisé par la méthode SIMP du lissage *Laplacien* provoque une perte généralisée des arêtes saillantes et une réduction drastique du volume (Figure 2-40b), de l'autre côté un lissage qui conserve les détails fins (ou en anglais *features*) comme les arêtes vives tout en lissant les zones irrégulières (exemple de celui de Chen et *al.* [98]) peut résulter en une triangulation non conforme ou en anglais *overlapping triangles* (Figure 2-40c). La recherche reste ouverte quant à la conception d'une méthode ou méthodologie de lissage adaptée à l'enveloppe irrégulière de la forme optimisée d'un résultat d'optimisation topologique.

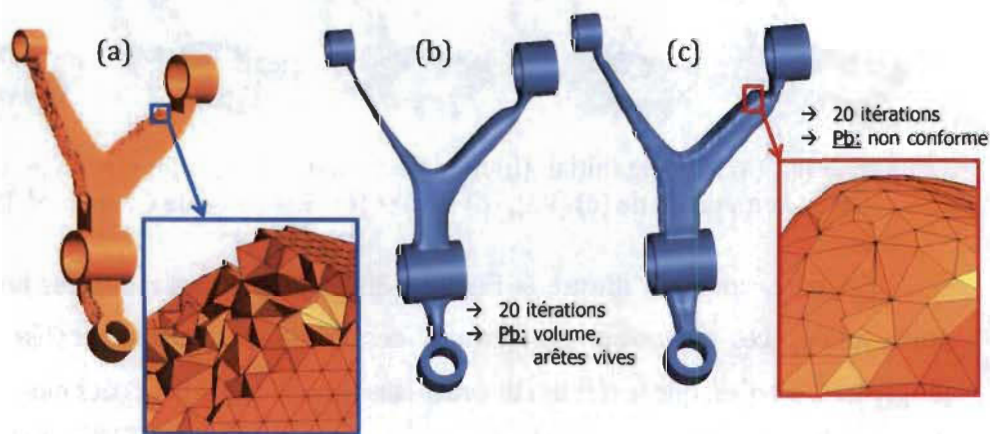


Figure 2-40 : Enveloppe du modèle optimisé (a) à la fin de la SIMP et après 20 itérations du lissage, (b) *Laplacien* et (c) de Chen et *al.* [98].

2.8.3 Méthodes de squelettisation

La squelettisation d'un objet [72, 100] est une opération qui permet d'obtenir la représentation simplifiée et compacte de ce dernier. Elle préserve également ses propriétés topologiques et locales. Le principal avantage de son utilisation est la capture des informations locales (exemples : symétrie, adjacence, voisinage, complexité locale de la forme à partir du nombre de branches et largeur locale), de la topologie, de la localisation des singularités et de l'orientation des régions représentées ainsi que de la frontière du modèle. Dès lors, les différences de forme entre objets peuvent être quantifiées plus précisément. Un squelette peut être défini comme le lieu géométrique des centres des sphères intérieures, tangentes à la frontière d'un objet en plus de deux endroits ; ou encore comme le lieu d'intersection des fronts de feux allumés simultanément sur la frontière d'un polygone et se propageant vers l'intérieur à vitesse uniforme [101].

Un squelette est constitué de trois types de points que sont les points d'extrémité ou points simples qui ont un seul point voisin sur le squelette, les points constituant les branches du squelette qui ont deux points voisins sur le squelette, et les points d'intersection des branches ou jointures (Figure 2-41).

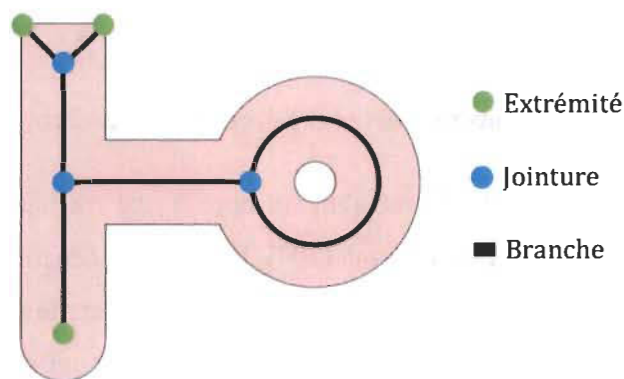


Figure 2-41 : Type de points d'un squelette (tirée de Palágyi [102]).

Bien que très répandue entre autres parce qu'elle offre une description précise de l'objet, la squelettisation des modèles 3D est très coûteuse. Elle peut s'effectuer en utilisant l'une des trois grandes classes d'algorithme que sont le squelette de Voronoï qui

utilise notamment des transformations du maillage [103], l'amincissement qui s'appuie principalement sur les techniques de contraction de maillages [104, 105] ou la fonction de distance basée essentiellement sur la variation d'un champ [106].

Soit un ensemble de points dans le plan (respectivement de l'espace). Supposons que chaque point commence à grossir à la même vitesse en définissant une région circulaire (respectivement sphérique). Quand deux régions se rencontrent, une frontière linéaire se forme le long de la médiatrice des deux points associés. Lorsque la croissance des régions n'est plus possible, on obtient une partition du plan (respectivement de l'espace), où chaque zone est définie comme la zone d'influence d'un point, c'est-à-dire l'ensemble des points les plus proches du point considéré que tout autre point du plan (respectivement de l'espace) : c'est le diagramme de Voronoï (Figure 2-42).

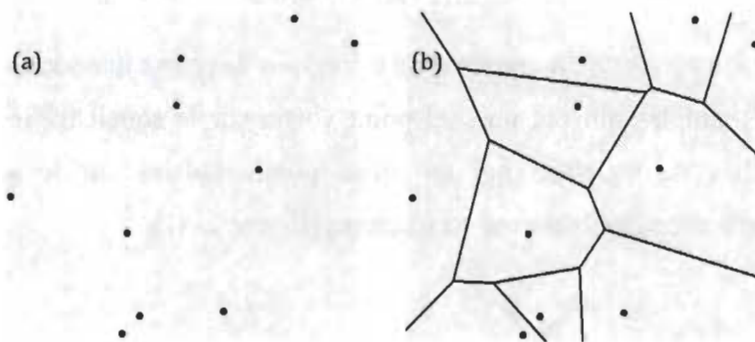


Figure 2-42 : (a) Points initiaux et (b) diagramme de Voronoï (tirée de Palágyi [102]).

Le squelette d'une forme (encore appelé axe médian), fait partie intégrante du diagramme de Voronoï de la forme [107]. En effet, en densifiant les points de la frontière d'un modèle, le diagramme de Voronoï obtenu tend vers le squelette du modèle, comme l'illustre la Figure 2-43. Aussi, en traçant simplement un segment liant un point et les points des régions voisines, on obtient une triangulation de Delaunay qui est l'unique triangulation (respectivement tétraédrisation) du plan (respectivement de l'espace) dont tout triangle (respectivement tétraèdre) admet un cercle circonscrit (respectivement sphère circonscrite) qui ne contient aucun point du plan (respectivement de l'espace).

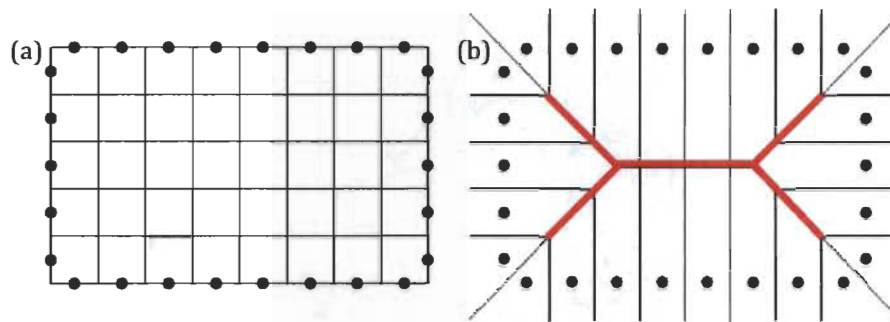


Figure 2-43 : (a) Frontière d'un rectangle approximé avec un ensemble de points et (b) squelette comme une partie du diagramme de Voronoï (tirée de Palágyi [102]).

Les méthodes utilisant le squelette de Voronoï permettent de préserver la topologie et de déterminer précisément l'axe médian d'un objet densément échantillonné [101]. Le squelette de Voronoï est obtenu après une opération dont le coût croît en fonction de la complexité du modèle à extraire et de la densité des éléments échantillonnés. Un algorithme d'élagage puis une reconstruction de certaines branches doivent être appliqués pour obtenir le squelette final.

Les méthodes de squelettisation basées sur l'amincissement ou l'érosion consistent à peller itérativement les couches de l'objet en prenant soin de ni le couper, ni le trouser. Elles font intervenir la forme discrète de l'objet où les éléments sont retirés (Figure 2-44). Après discrétisation du modèle initial à l'aide de cellules cubiques ou *voxels*, Brunner et Brunnett [108] ont procédé à l'amincissement du modèle pour retrouver son squelette. La détection des parties significatives pour la segmentation s'effectue à partir d'un graphe dans lequel chaque *voxel* du squelette correspond à un nœud sur le graphe. Delest et *al.* [109] ont employé une méthode analogue en prenant en considération les informations du squelette comme des marqueurs pour la ligne de partage des eaux. Après la transformation en *voxels*, ceux dont la suppression ne modifie pas la topologie du modèle (*voxel* simple) sont supprimés, ainsi de suite jusqu'à l'obtention du squelette.

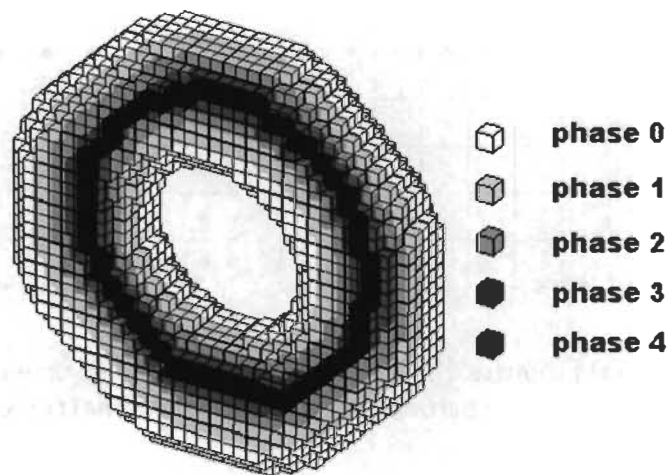


Figure 2-44 : Illustration d'un squelette (en noir) par amincissement (tirée de Palágyi [102]).

Les méthodes d'amincissement sont robustes, simples à implémenter, conservent les informations sur la forme initiale et aboutissent à un squelette centré. Toutefois, elles ne garantissent pratiquement pas les propriétés géométriques du modèle (par exemple la convexité). De plus, si elles donnent de bons résultats avec des maillages structurés (utilisant par exemple des éléments cubiques), elles deviennent plus complexes à mettre en œuvre sur des maillages non structurés et nécessitent souvent l'approximation très coûteuse du modèle avec des éléments cubiques ou en anglais *voxelization*.

Les méthodes basées sur une *fonction distance* quant à elles comptent surtout parmi les outils de traitement d'images numériques. Elles associent à chaque point (pixel en 2D) d'un objet la distance au point le plus proche du contour ; on obtient de cette façon une carte de distance (voir illustration Figure 2-45). Le squelette de l'objet correspond aux maxima locaux de la carte de distance. Cependant, en plus d'avoir à surmonter la difficulté de détecter des crêtes sur la carte de distance, elles n'assurent pas l'homotopie du squelette (possibilité de passer continument d'un objet à l'autre) avec l'objet initial ; il n'y a donc pas de garantie du respect de la topologie.

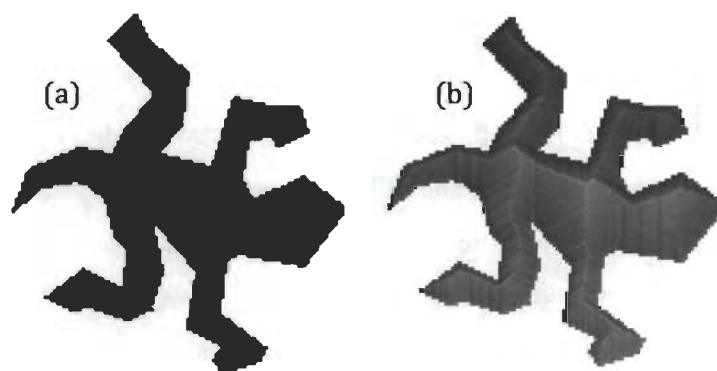


Figure 2-45 : (a) Image binaire initiale et (b) carte de distance (tirée de Palágyi [102]).

Raab et *al.* [110] ont combiné l'amincissement avec une fonction distance pour extraire le squelette de modèles. Dans un premier temps, une surface médiane discrète (*discrete medial surface*) est obtenue par la discrétisation de l'objet à l'aide de cellules 3D (ou *voxels*). Dans le deuxième temps, l'axe médian est retrouvé par comparaison du champ de distance entre *voxels* de la surface médiane. Quadros et *al.* [111] ont utilisé l'axe médian et les propriétés géométriques d'un modèle pour concevoir une fonction de taille (*sizing function*) adaptée à des points d'échantillonnage (*sources points*). Le squelette est obtenu par la technique de propagation du front de feu. Cette dernière permet d'avoir des informations telles que la distance parcourue par le front de feu (qu'ils ont appelé rayon) et la position des nœuds du squelette.

Contrairement à la documentation de la squelettisation des modèles 2D qui abonde dans la littérature, celle des modèles 3D est plus clairsemée. En effet, l'utilisation directe de la surface médiane pour identifier des éléments significatifs est non seulement plus difficile, mais aussi contrevient, jusqu'à une certaine limite, à la définition même d'un squelette qui doit représenter un ensemble avec un minimum d'informations et être commode à manipuler. C'est pour cela que l'on préfère un squelette filaire qui est plus fin.

Prenant en compte ces limitations, Dey et *al.* [112] furent parmi les premiers à introduire la possibilité d'obtenir une courbe-squelette (*curve-skeleton*) d'un modèle 3D

(voir illustration Figure 2-46). Le squelette du modèle est représenté sous forme d'une courbe. Les potentielles applications de ce squelette ont été étudiées une année plus tard par Cornea et *al.* [73]. Ils définissent la courbe-squelette comme la courbe ou ligne médiane de la surface médiane. Elle est en effet un sous-ensemble de la surface médiane. Elle est obtenue à l'aide de la fonction géodésique moyenne (*medial geodesic function*) comme le lieu des points tangents à au moins deux voisins sur la frontière de la surface médiane. En opposition à l'*axe médian* en 3D qui est une ligne formée d'éléments [113], la courbe-squelette est constituée uniquement de points reliés les uns aux autres par des segments.

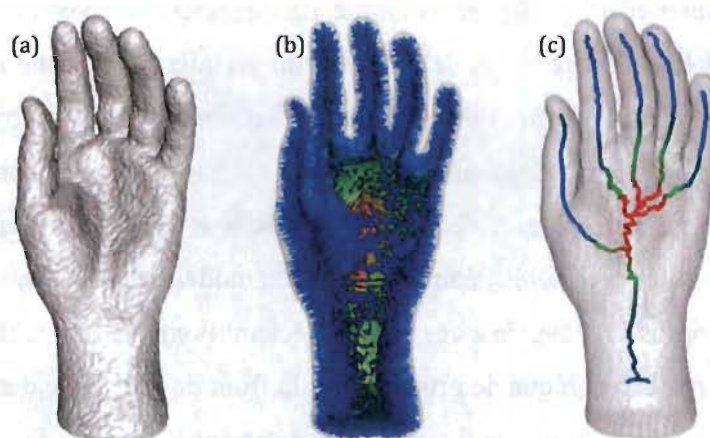


Figure 2-46 : Squelettisation. (a) Main bruitée, (b) surface médiane avec les valeurs de la fonction géodésique moyenne et (c) la courbe-squelette (tirée de Dey et *al.* [112]).

L'obtention de la courbe-squelette telle que définie peut être vue comme une squelettisation en deux étapes : une première pour l'obtention de la surface médiane et la deuxième pour l'extraction de la courbe-squelette de ladite surface. C'est pour cela que certains l'ont définie comme *le squelette du squelette surfacique* [114]. En effet, Telea et *al.* [114] ont extrait de manière itérative une courbe-squelette en utilisant le champ de gradient de la carte de distance préalablement obtenue. Dans leur contexte, la courbe-squelette est le lieu des points où le gradient change brutalement de direction (voir illustration Figure 2-47).

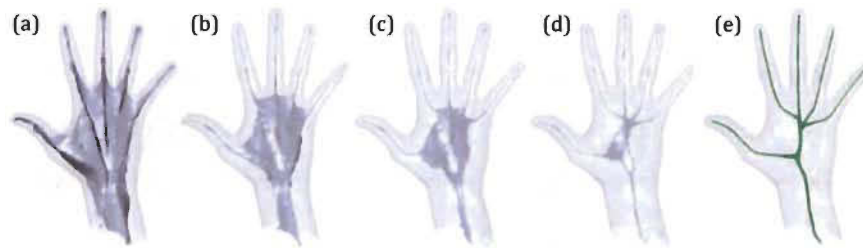


Figure 2-47 : Étapes d'advection pour l'extraction de la courbe-squelette : (a) à (d) surfaces médianes et (e) rendu de la courbe-squelette (tirée de Telea et *al.* [114]).

Cao et *al.* [105] ont proposé une extension aux surfaces relativement rugueuses de la méthode de contraction de maillage basée sur le *Laplacien* effectué par Au et *al.* [104]. Ils ont utilisé à leur avantage le défaut de réduction sévère de volume lors d'un lissage *Laplacien* et le déplacement des nœuds au centre de gravité de leur voisinage pour centrer le squelette. Cette contraction est suivie d'un amincissement topologique ou érosion (*thinning*) pour réduire la structure squelettique à une courbe.

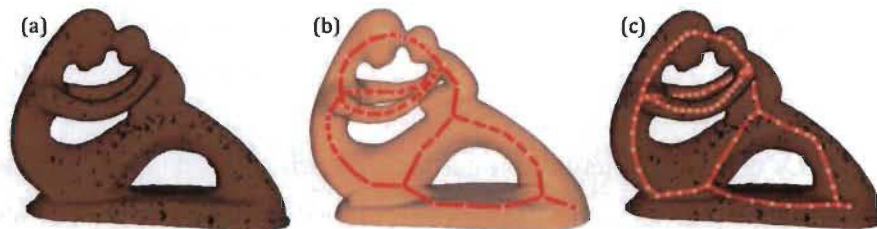


Figure 2-48 : (a) Nuage de points initial. Courbe-squelette d'après (b) Au et *al.* [104] et (c) Cao et *al.* [105] (tirée de Cao et *al.* [105]).

Une extension de cette stratégie pour des modèles bruités et sur les nuages de points a été employée par Tagliasacchi et *al.* [115]. Dans leur approche, le modèle est tout d'abord découpé en sections transversales. La courbe-squelette est par la suite définie par le lieu des centres des sections qui minimisent la variation entre le squelette et la normale du plan de section suivant la courbe. Le processus de squelettisation est présenté sur la Figure 2-49. En comparant notamment la capacité de préservation des détails, l'homotopie et l'invariance face aux transformations isométriques de plusieurs méthodes d'extraction de courbe-squelette, Sobiecki et *al.* [116] ont proposé un classement global de certaines méthodes de *courbe-squelettisation* en fonction du type d'application.

La courbe-squelette, attrayante pour sa forme simplifiée et sa capture intuitive des caractéristiques topologiques du modèle, est entre autres utilisée dans la segmentation [104], dans la vérification des similarités entre objets et la récupération des parties initialement absentes du fait du processus d'acquisition [117], et dans la reconstruction de surface et l'animation [110, 115].

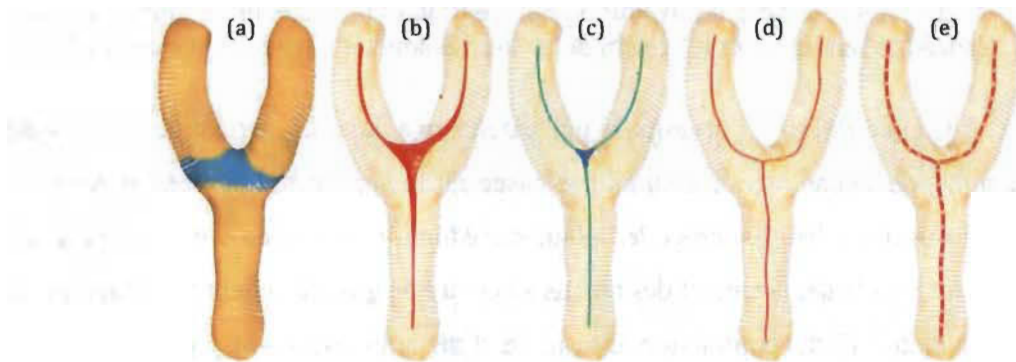


Figure 2-49 : Principe de squelettisation. (a) Nuage de points en entrée et jointure en bleu. Obtention du squelette après (b) contraction par *Laplacien* et (c) érosion du nuage de points ; les branches du squelette en vert et la jointure en bleu. (d) Nuage de points recentré et (e) squelette 1D final (tirée de Tagliasacchi et *al.* [115]).

La courbe-squelettisation permet de s'affranchir de l'étape laborieuse d'obtention de la surface médiane, de l'étape onéreuse de *voxélisation* et de la phase d'élagage des morceaux de branches indésirables des squelettes de Voronoï, pour à la fin donner une courbe-squelette très bien adaptée pour des formes allongées ou tubulaires [116]. Ainsi, il apparaît que la combinaison de l'extraction du squelette sous forme de courbe avec une carte de distance permettrait d'adjoindre au squelette des informations sur les caractéristiques géométriques telles que l'estimation de la taille de la section transversale et la longueur d'un point d'extrémité à un joint pour d'éventuels calculs. Cet ensemble de faits font de la courbe-squelette un outil propice à l'interprétation des résultats d'optimisation topologique, surtout lorsque ces derniers s'orientent vers structures composées de poutres.

2.9 Conclusion

Les grandes familles d'optimisation topologique que sont les méthodes d'homogénéisation, évolutionnaires, *Level-set* et la méthode SIMP ont été présentées dans ce chapitre. On a également vu que, une fois l'optimisation effectuée, deux principaux moyens sont employés pour interpréter les modèles optimisés : les méthodes par découpage et l'utilisation de primitives simples. Les méthodes par découpage effectuent un tranchage du modèle à certains endroits pour capturer les informations sur sa forme et reconstruire ce dernier à partir des profils obtenus. D'un autre côté, les méthodes utilisant les primitives approximent l'enveloppe du modèle ainsi que les singularités (par exemple la forme des trous) le constituant avec des formes géométriques simples.

Cependant, toutes ces méthodes d'interprétation nécessitent à un certain moment l'intervention de l'opérateur, ce qui les rend semi-automatiques. De plus, la taille des éléments du maillage a un impact assez important sur le résultat après conversion, surtout lorsque l'on utilise des méthodes de répartition de la densité de matière dans le modèle. Un raffinement adaptatif, en simultané avec un déraffinement du maillage afin d'adapter la qualité du résultat de l'optimisation et d'améliorer la définition des frontières structurelles, font l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE 3 OPTIMISATION TOPOLOGIQUE ADAPTATIVE

3.1 Introduction

Comme mentionné dans le chapitre précédent, ne pas avoir de restrictions quant à la forme et au type d'éléments contenus dans la solution finale confère à l'optimisation topologique un avantage certain par rapport aux autres techniques d'optimisation. Ce chapitre introduit une nouvelle stratégie permettant l'amélioration de la qualité des résultats d'optimisation topologique en ce qui concerne notamment la valeur finale de la *fonction objectif* et la description de la frontière structurelle. Pour ce faire, la méthode d'optimisation topologique par distribution de la matière en utilisant la méthode SIMP va d'abord être décrite. Le résultat à la fin du processus d'optimisation, encore appelé résultat *brut* de l'optimisation, est par la suite ajusté à travers un procédé automatique de raffinement et de déraffinement adaptatifs.

3.2 Hypothèses

Plusieurs hypothèses circonscrivent le cadre de ce travail. En effet, l'on considère que la forme initiale du modèle à optimiser, au même titre que les conditions aux limites et de chargement auxquelles il est sujet, sont connues et bien définies. On considère également le matériau employé comme isotrope, ce qui fait que les solutions physiques de type composites ne sont pas admises, car l'interprétation des densités intermédiaires sous forme de composites demanderait d'appliquer une technique d'homogénéisation qui est hors de notre cadre d'étude.

3.3 Méthode SIMP

La méthode SIMP, pour *Solid Isotropic Material with Penalization*, est une des méthodes d'optimisation topologique les plus documentées dans la littérature. Elle consiste en une répartition de la densité de matière dans les éléments du maillage d'un

modèle sous certaines contraintes afin d'en dégager la forme la plus rigide. Ce faisant, elle procède à la distribution d'une quantité donnée de vide dans le modèle. Cette porosité du matériau est mesurée à l'aide de la densité de matière $\rho(x, y, z)$ qui varie de 0 à 1, où 0 représente le vide absolu (absence de matière) et 1 le matériau plein (absence de porosité).

Dans tous les exemples de ce document, la méthode SIMP aura pour objectif une minimisation de la compliance, autrement dit une maximisation de la rigidité globale du modèle considéré, sujette à une contrainte volumique.

La Figure 3-1 présente l'algorithme de la méthode SIMP qui sera détaillée dans la suite de cette section.

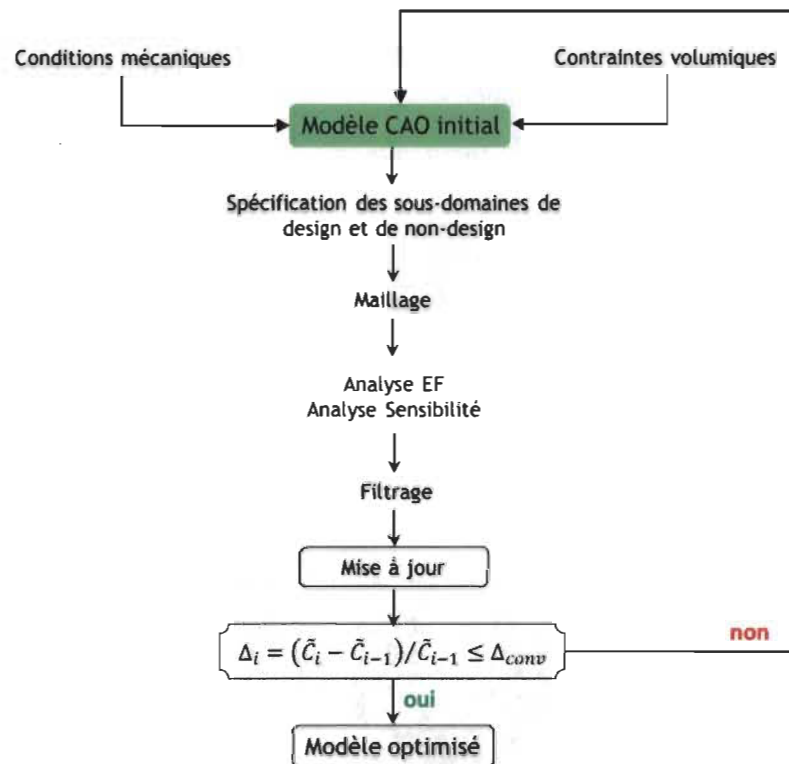


Figure 3-1 : Schéma du processus d'optimisation par la méthode SIMP.

3.3.1 Modélisation et conditions mécaniques

Que ce soit pour un nouveau produit ou pour un produit préexistant, l'application de la méthode SIMP commence par une modélisation dans un logiciel de CAO. Modéliser revient à décrire de façon simplifiée un système ou problème à l'aide notamment d'une représentation physique, géométrique ou mathématique appelée *modèle*. De manière générale, plus une modélisation est précise, plus les simulations seront proches du comportement réel du produit considéré. Une bonne approximation de la forme réelle, particulièrement de la zone de *non-design* (voir sous-section 3.3.2 suivante), est importante. Après obtention du modèle géométrique initial, on applique les conditions mécaniques qui comprennent les conditions aux limites, les chargements et les caractéristiques du matériau utilisé.

La Figure 3-2 montre un modèle *cas test* de type passerelle employé à titre illustratif pour présenter l'ensemble de la méthodologie développée. La passerelle a pour dimensions globales $5,6m \times 5m \times 25m$. Sur la figure sont également présents les conditions aux limites en déplacements imposés au niveau des culées et le chargement sous forme de pression uniformément répartie en travée. Le chargement est $P_Y = -10 \text{ kN/m}^2$. Le module d'Young du matériau utilisé est de $E = 69 \text{ GPa}$ et le coefficient de Poisson de $\nu = 0,3$. La fraction volumique conservée est $f = 5\%$.

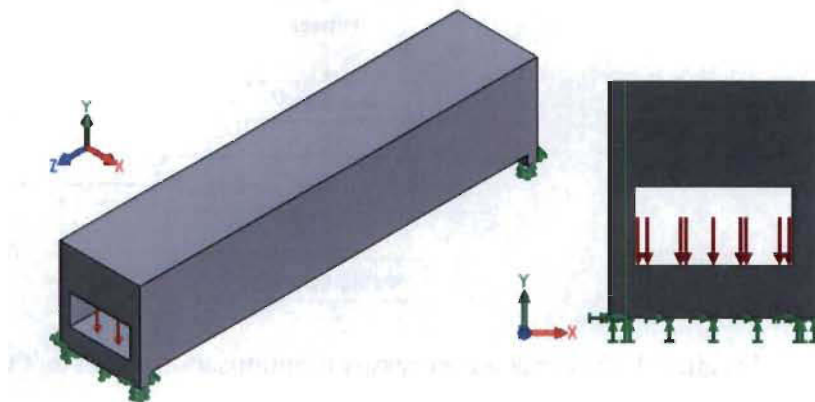


Figure 3-2 : Illustration d'un problème d'optimisation avec le modèle *cas test*.

3.3.2 Subdivision en sous-domaines de *design* et de *non-design*

Une fois le problème modélisé et les conditions mécaniques (incluant conditions aux limites, chargements et caractéristiques du matériau) appliquées, on spécifie les sous-domaines de *design* et ceux de *non-design*. Cette subdivision du modèle initial est indispensable afin de garantir la fonctionnalité de la structure après optimisation. Le sous-domaine de *design* est l'espace qui sera optimisé, autrement dit dans lequel la matière sera répartie de manière optimale. Le sous-domaine de *non-design* est l'espace qui ne sera pas affecté par le processus d'optimisation, ou encore l'espace contenant les endroits fonctionnels du modèle. Dans la plupart des cas, les conditions aux limites et de chargement sont appliquées dans le sous-domaine de *non-design*. Le domaine initial et les sous-domaines de *design* et de *non-design* sont définis sous forme de modèle B-REP pour *Boundary REPresentation* [43]. Ce dernier représente un solide par ses frontières (sous forme d'un ensemble de surfaces appelées coquilles) et permet une définition précise de son intérieur, de son extérieur et de la frontière qui les sépare [118]. Un modèle B-REP possède deux types d'information : la topologie (volume, faces, arêtes et sommets) et la géométrie (surfaces contenant les courbes délimitant les faces et contenant les lignes, puis les points délimitant les contours et formant les sommets). À condition que ces surfaces soient fermées, orientables, bornées, connectées et ne s'entrecoupent pas, le solide est représenté par l'union de ses faces.

La Figure 3-3 présente une illustration du résultat de la subdivision du modèle *cas test* en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge).

3.3.3 Maillage

La similitude étroite entre le modèle B-REP et la structure de données d'un maillage (tétraèdre, triangle, arête, nœud) est la pierre angulaire du processus de génération de ce dernier. Le maillage d'un domaine [119] est la discrétisation spatiale de ce dernier à l'aide d'éléments finis bien définis, appelés mailles. L'étape de maillage est obligatoire et préalable à l'analyse par éléments finis. Dans un contexte de maillage automatique non

structuré, en plus d'être généré automatiquement, le maillage doit respecter les spécifications des sous-domaines de *design* et de *non-design*, principalement pour assurer la continuité et la conformité au niveau de l'interface entre les deux sous-domaines [120]. Durant le maillage, les éléments finis tétraédriques sont tagués comme appartenant soit au sous-domaine de *design*, soit à celui du *non-design*. En pratique, l'on définit le modèle entier, puis le modèle de *non-design*. Le sous-domaine de *design* est obtenu automatiquement de manière implicite, comme la soustraction du *non-design* du modèle entier. Une méthode de maillage basée sur la méthode frontale [119] avait déjà été développée et implantée dans notre environnement de travail. Les lecteurs sont invités à lire les références [12, 13, 118, 120-122] pour plus amples détails.

La procédure, en 14 étapes, consiste en plusieurs transferts entre le modèle entier et le modèle de *non-design*. Elle peut être présentée ainsi qu'il suit [12, 120] :

1. Générer les nœuds aux sommets du modèle entier
2. Transférer tous les nœuds de l'étape 1, qui appartiennent à des sommets communs avec le *non-design*, sur lesdits sommets du *non-design*
3. Générer les nœuds sur le reste des sommets du *non-design*
4. Transférer les nœuds de l'étape 3 qui appartiennent aux arêtes communes avec le modèle entier sur lesdites arêtes du modèle entier
5. Mailler toutes les arêtes du modèle entier avec des segments, en tenant compte des nœuds créés à l'étape 4
6. Transférer les segments des arêtes de l'étape 5 qui appartiennent aux arêtes communes avec le *non-design* sur lesdites arêtes du *non-design*
7. Générer les segments sur le reste des arêtes du *non-design*
8. Transférer les segments de l'étape 7 qui appartiennent aux faces communes avec le modèle entier sur lesdites faces du modèle entier
9. Mailler toutes les faces du modèle entier avec des triangles, en tenant compte des segments créés à l'étape 8
10. Transférer les triangles des faces de l'étape 9 qui appartiennent aux faces communes avec le *non-design* sur lesdites faces du *non-design*
11. Mailler toutes les faces du *non-design* avec des triangles, en tenant compte des triangles créés à l'étape 10

12. Mailler le *non-design* avec des tétraèdres
13. Transférer les tétraèdres de l'étape 12 au modèle entier
14. Mailler le modèle entier avec des tétraèdres, en tenant compte des tétraèdres créés à l'étape 13

La Figure 3-3 illustre le résultat de cette procédure sur le modèle *cas test*. Il s'agit d'une discrétisation uniforme en utilisant un écart nodal constant $d_g = 250\text{mm}$. La partie de *design* est en bleu et la partie de *non-design* est en rouge.

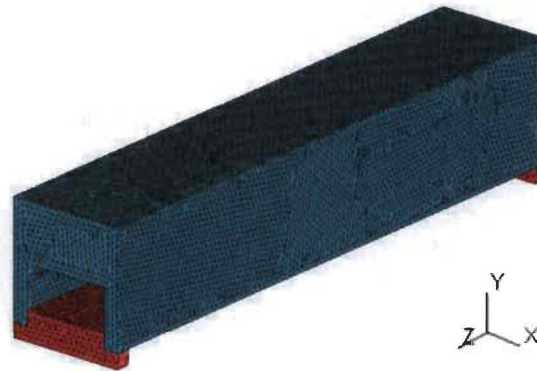


Figure 3-3 : Illustration de la subdivision du modèle *cas test* en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge), avec un maillage uniforme ($d_g = 250\text{mm}$).

3.3.4 Formulation du problème comme une distribution de matière

Considérons un élément mécanique à optimiser, notamment le modèle *cas test*. Ce dernier occupe un volume V dans l'espace et est subdivisé en sous-domaines. Conséquemment à cette subdivision, la porosité sera redistribuée uniquement dans le domaine de *design* et le domaine de *non-design* aura une valeur de densité fixe égale à 1, c'est-à-dire absence de vide. Afin de procéder à la distribution optimale de la matière dans le domaine de *design*, pour chaque élément du maillage est assigné un matériau fictif différent selon sa densité. Pour éviter les problèmes d'instabilité numérique en pratique on utilise $0 < \rho_{vide} = 0,001$. La définition du module d'Young virtuel $\tilde{E}(x, y, z)$ des matériaux liés à la distribution de densité $\rho(x, y, z)$ se fait suivant la loi de pénalisation :

$$\tilde{E}(x, y, z) = E_0 \cdot \rho(x, y, z)^p \quad (3-1)$$

Où E_0 est le module d'Young réel du matériau et p est le coefficient de pénalisation.

La pénalisation a pour effet de rentabiliser la contribution à la rigidité globale des éléments de densité intermédiaire afin d'éviter la formation de microstructures à l'intérieur du domaine de *design*. La relaxation du problème d'optimisation, qui permet une distribution continue de la densité de matière entre 0 et 1, ne permet pas d'obtenir des résultats discrets, d'où l'importance du facteur de pénalisation p . Comme le schématise la Figure 3-4, plus le coefficient p va être élevé, plus les éléments de faible densité seront attirés vers 0 (le vide). Les éléments de densité élevée se rapprochent de 1 et constituent le modèle optimisé. Par exemple la densité $\rho = 0,4$ devient 0,4 ; 0,07 et 0,01 après l'application des coefficients de pénalisation 1, 3 et 5 respectivement.

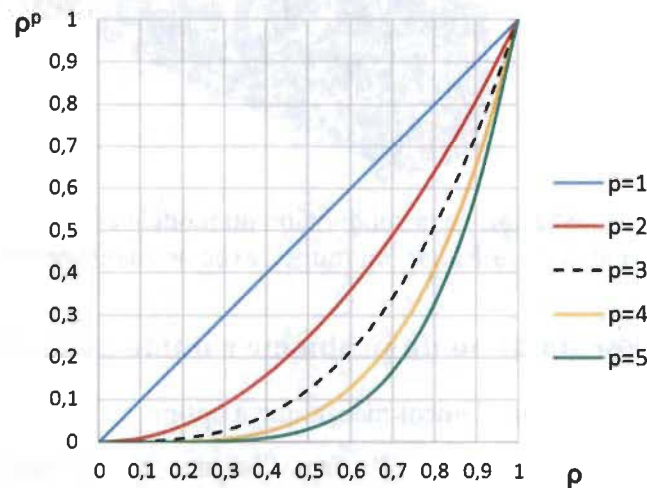


Figure 3-4 : Effet du coefficient de pénalisation p .

La valeur recommandée par Bendsoe et *al.* [1] lors d'une optimisation 3D est $p \geq 3$. Ces derniers ont proposé des équations pour retrouver la valeur du coefficient p en 2D et 3D en fonction du coefficient de poisson ν du matériau utilisé :

$$\begin{aligned}
 p &\geq \max \left\{ \frac{2}{1-\nu}, \frac{4}{1+\nu} \right\} && \text{en 2D} \\
 p &\geq \max \left\{ 15 \cdot \frac{1-\nu}{7-5\nu}, \frac{3}{2} \cdot \frac{1-\nu}{1-2\nu} \right\} && \text{en 3D}
 \end{aligned} \tag{3-2}$$

Dans ce travail $p = 3$. De fait, comme l'illustre la Figure 3-5, lorsque $p = 1$, il n'y a pas de pénalisation. La solution est constituée en grande partie d'éléments ayant de faibles densités. En augmentant p on voit se définir la forme structurelle du modèle optimisé et l'apparition des éléments de rigidification (pour $p = 2$). Lorsque $p = 3$, certains détails précédemment « flous » deviennent distincts et la silhouette optimisée est plus précise. On peut donc considérer qu'à partir de $p = 3$ tous les détails structurels sont présents dans la forme optimisée. Lorsque $p = 5$, il y a une augmentation de la possibilité d'obtention d'un minimum local [1], comme le montrent la figure et le nombre d'itérations avant convergence. Effectivement, pour $p = 1, 2, 3$ et 5 , le processus de la méthode SIMP a convergé après 10, 26, 24 et 12 itérations respectivement.

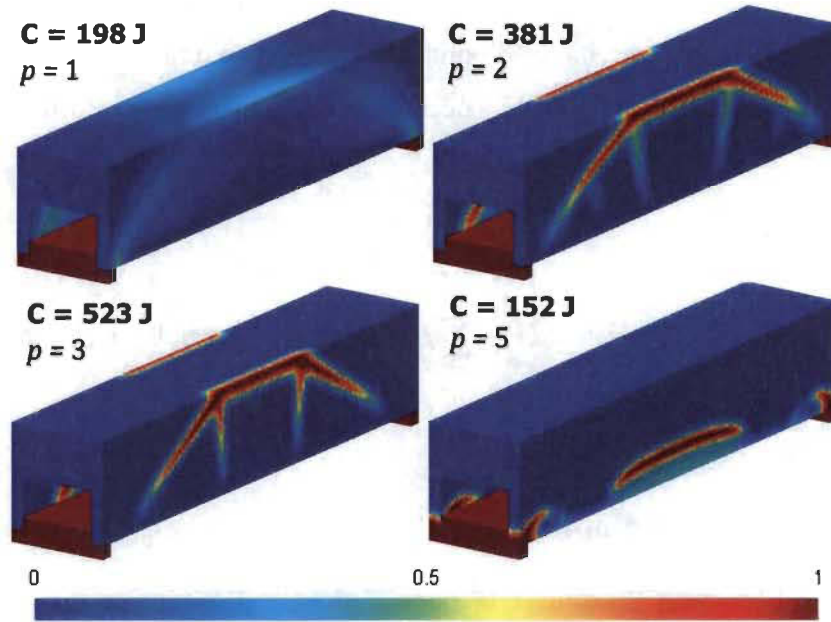


Figure 3-5 : Effet du coefficient de pénalisation p sur un résultat d'optimisation.

Pour une structure donnée, maximiser sa raideur globale revient à minimiser le travail global des forces extérieures. Ce travail, appelé *compliance*, est défini par :

$$\tilde{C} = \{\tilde{U}\}' \cdot \{F\} = \{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} \quad \text{avec} \quad \{F\} = [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} \quad (3-3)$$

Où $\{\tilde{U}\}$ est le vecteur global de déplacement, $\{F\}$ le vecteur global des forces appliquées et $[\tilde{K}]$ représente la matrice de rigidité globale. Dans le reste de ce document, toutes les variables affectées du *chapeau* \sim sont celles affectées par la densité $\rho(x, y, z)$.

Soit $[K_e]$ la matrice de rigidité locale expansée d'un élément e de densité ρ_e d'un maillage constitué de N éléments. La matrice de rigidité globale modifiée est :

$$[\tilde{K}] = \sum_{e=1}^N [\tilde{K}_e] = \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p \cdot [K_e] \quad (3-4)$$

En considérant la fraction volumique de matière à conserver $f = \tilde{V}/V_d$, où \tilde{V} est le volume de *design* une fois le vide enlevé par la distribution relative de densité et V_d le volume total de *design*, le problème d'optimisation revient à trouver la compliance minimale pour une quantité fixée de volume à occuper par la matière. Il se reformule ainsi [1] :

$$\begin{aligned} \text{Minimiser } \tilde{C} &= \sum_{e=1}^N (\rho_e)^p \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [K_e] \cdot \{\tilde{U}\} \\ \text{Avec : } &\begin{cases} \tilde{E}(x, y, z) = E \cdot \rho(x, y, z)^p \\ \tilde{V} = \sum_{e=1}^N \rho_e \cdot V_e = f \cdot V_d & \text{et } 0 < \rho_{\text{vide}} \leq \rho \leq 1 \\ \{F\} = [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} \end{cases} \end{aligned} \quad (3-5)$$

3.3.5 Critère d'optimalité

L'on veut maximiser la raideur globale d'une **pièce** tout en s'assurant qu'elle remplisse sa fonction initiale **en supportant** les efforts appliqués. Pour ce faire, on a recours à la méthode du critère d'optimalité [1]. Elle regroupe les conditions d'optimalité, c'est-à-dire l'ensemble des inégalités que doivent vérifier les solutions du problème d'optimisation. En pratique, le Lagrangien est utilisé pour retrouver les conditions nécessaires d'optimalité du 1^{er} ordre (dérivée 1^{re}). Le Lagrangien est souvent employé lorsque, comme dans le cas présent, on veut retrouver l'extrémum (ici un minimum) d'une fonction (ici la compliance) de plusieurs variables (ici la densité de matière ρ) parmi un

ensemble de points (ici l'espace de conception) respectant certaines contraintes (comme la fraction volumique). La méthode du Lagrangien consiste à rechercher un point tel que la différentielle de ce dernier par rapport à chaque variable soit nulle.

Le Lagrangien du problème d'optimisation énoncé dans l'équation 3-5 s'écrit [123] :

$$\mathcal{L} = \tilde{C}(\rho) + \alpha([\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} - \{F\}) + \lambda(V - f \cdot V_d) + \gamma(\rho_{vide} - \rho) + \delta(\rho - 1) \quad (3-6)$$

Les paramètres α , λ , γ et δ sont appelés multiplicateurs de Lagrange respectivement pour l'équation d'équilibre, la contrainte volumique et les contraintes aux bornes inférieures et supérieures de la variable. Le critère d'optimalité par rapport à la densité s'écrit [123] :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_e} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{C}(\rho_e)}{\partial \rho_e} + \alpha \frac{\partial([\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\})}{\partial \rho_e} + \lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} - \gamma + \delta = 0 \quad (3-7)$$

De même, la différentielle par rapport au vecteur déplacement permet d'écrire :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \{\tilde{U}\}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \{\tilde{U}\}} + \alpha[\tilde{K}] = \frac{\partial(\{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\})}{\partial \{\tilde{U}\}} + \alpha[\tilde{K}] = \{0\} \Rightarrow \alpha = -2 \cdot \{\tilde{U}\}' \quad (3-8)$$

En tenant compte de l'équation 3-8 dans l'équation 3-7 on voit que :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{C}(\rho_e)}{\partial \rho_e} + \alpha \left(\frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \cdot \{\tilde{U}\} + [\tilde{K}] \cdot \frac{\partial\{\tilde{U}\}}{\partial \rho_e} \right) + \lambda \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho_e} - \gamma + \delta = 0 \\ & \Leftrightarrow \{\tilde{U}\}' \frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \{\tilde{U}\} + \frac{\partial\{\tilde{U}\}'}{\partial \rho_e} [\tilde{K}] \{\tilde{U}\} + \{\tilde{U}\}' [\tilde{K}] \frac{\partial\{\tilde{U}\}}{\partial \rho_e} \\ & \quad - 2\{\tilde{U}\}' \left(\frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \{\tilde{U}\} + \frac{\partial\{\tilde{U}\}}{\partial \rho_e} [\tilde{K}] \right) + \lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} - \gamma + \delta = 0 \\ & \Leftrightarrow \{\tilde{U}\}' \cdot \frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \cdot \{\tilde{U}\} + 2 \cdot \frac{\partial\{\tilde{U}\}'}{\partial \rho_e} \cdot [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} \\ & \quad - 2\{\tilde{U}\}' \cdot \frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \cdot \{\tilde{U}\} - 2 \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}] \cdot \frac{\partial\{\tilde{U}\}}{\partial \rho_e} + \lambda \cdot \frac{\partial V}{\partial \rho_e} - \gamma + \delta = 0 \\ & \Leftrightarrow -\{\tilde{U}\}' \frac{\partial[\tilde{K}]}{\partial \rho_e} \cdot \{\tilde{U}\} + \lambda \frac{\partial V}{\partial \rho_e} - \gamma + \delta = 0 \Leftrightarrow -p\rho_e^{\nu-1} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}] \cdot \{\tilde{U}\} + \lambda V_e - \gamma + \delta = 0 \end{aligned} \quad (3-9)$$

Pour les densités intermédiaires $\rho_{vide} < \rho < 1$, ce qui correspond à l'espace de conception. Dans cet espace $\gamma = 0 = \delta$, car γ (contrainte $\rho_{vide} \leq \rho$) et δ (contrainte $\rho \leq 1$) sont nulles à l'extérieur de leur zone de contrainte active. L'équation 3-9 devient :

$$-p\rho_e^{p-1} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [K_e] \cdot \{\tilde{U}\} + \lambda V_e = 0 \Rightarrow -\frac{p\rho_e^{p-1} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [K_e] \cdot \{\tilde{U}\}}{\lambda V_e} + 1 = 0 \quad (3-10)$$

En introduisant B_e le coefficient d'optimalité, ρ_e^0 la valeur de la densité de l'élément e à l'itération précédente et η un coefficient d'amortissement, l'équation 3-10 peut encore être écrite sous forme d'algorithme de mise à jour tel que [123] :

$$(B_e)^\eta = 1 \Leftrightarrow \rho_e (B_e)^\eta = \rho_e \quad (3-11)$$

$$\Rightarrow \rho_e = \rho_e^0 (B_e^0)^\eta \quad \text{Avec} \quad B_e^0 = \frac{p\rho_e^{p-1} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [K_e] \cdot \{\tilde{U}\}}{\lambda V_e}$$

Finalement le schéma de mise à jour de la densité de matière à chaque itération k pour chaque élément e (noté ρ_e^k) constitue l'algorithme du critère d'optimalité et s'écrit [1] :

$$\rho_e^{k+1} = \begin{cases} \max(\rho_{vide}, \rho_e^k - m) & \text{si } \rho_e^{k+1} \leq \max(\rho_{vide}, \rho_e^k - m) \\ \rho_e^k (B_e^k)^\eta & \text{si } \max(\rho_{vide}, \rho_e^k - m) < \rho_e^{k+1} < \min(1, \rho_e^k + m) \\ \min(1, \rho_e^k + m) & \text{si } \min(1, \rho_e^k + m) \leq \rho_e^{k+1} \end{cases} \quad (3-12)$$

Où m se définit comme la limite de variation de la densité entre deux itérations. Cette condition s'écrit : $|\rho_e^{k+1} - \rho_e^k| \leq m$, et η est un coefficient d'amortissement. En pratique, on recommande $m = 0.2$ et $\eta = 0.5$. Sauf indication contraire, ce sont ces valeurs qui seront utilisées dans tous les exemples de ce document.

Remarquons également que pratiquement :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \rho_e} &= \frac{\partial \{\tilde{U}\}'}{\partial \rho_e} \cdot \{F\} = \frac{\partial \{\tilde{U}\}'}{\partial \rho_e} \cdot [\tilde{K}_e] \cdot \{\tilde{U}\} \quad \text{avec} \quad \{F\}' = \{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}_e] \\
&= -\{\tilde{U}\}' \cdot \frac{\partial [\tilde{K}_e]}{\partial \rho_e} \cdot \{\tilde{U}\} \quad \text{sachant que} \quad \frac{\partial \{\tilde{U}\}'}{\partial \rho_e} \cdot [\tilde{K}_e] + \{\tilde{U}\}' \cdot \frac{\partial [\tilde{K}_e]}{\partial \rho_e} = 0 \\
&= -p \rho_e^{p-1} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [K_e] \cdot \{\tilde{U}\} \quad \text{sachant que} \quad [\tilde{K}_e] = (\rho_e)^p \cdot [K_e] \\
&= -\frac{P}{\rho_e} \cdot 2 \cdot \tilde{W}_e \quad \text{avec} \quad \tilde{W}_e = \frac{1}{2} \cdot \{\tilde{U}\}' \cdot [\tilde{K}_e] \cdot \{\tilde{U}\}
\end{aligned} \tag{3-13}$$

En effet, $\{\tilde{U}\}^t \cdot [\tilde{K}_e] \cdot \{\tilde{U}\}$ est obtenu en calculant l'énergie de déformation \tilde{W}_e dans chaque élément e par l'analyse par éléments finis. La sensibilité de la compliance, en d'autres termes la sensibilité du travail global des forces extérieures aux variations de la densité, représentée dans l'équation 3-13 par le terme $\partial \tilde{C} / \partial \rho_e$, définit la variation de la fonction objectif par rapport à l'évolution de la densité dans chaque élément en tenant compte des contraintes.

3.3.6 Filtrage de la sensibilité de la compliance et de la densité

Le problème d'optimisation formulé dans la sous-section précédente sous forme de distribution de la densité de matière permet d'obtenir une valeur de la densité constante dans chaque élément du maillage. Cependant, sa mise en œuvre a fait ressortir plusieurs problèmes numériques dont les principaux sont l'effet damier et la dépendance à la taille (écart nodal) du maillage de la solution optimisée [1, 36, 124].

L'effet damier désigne la présence, dans la solution optimisée, d'une alternance entre les éléments solides et les éléments vides, comme sur un damier. Cette configuration est évidemment non désirable, étant donné qu'elle augmente les difficultés d'interprétation du résultat et les contraintes de fabrication et elle diminue la qualité des résultats, comme l'illustre la Figure 3-6 (voir notamment les damiers en vue de dessus). Sur cette figure, l'optimisation a convergé après 15 itérations et la compliance finale est $\tilde{C} = 378 \text{ Joules}$.

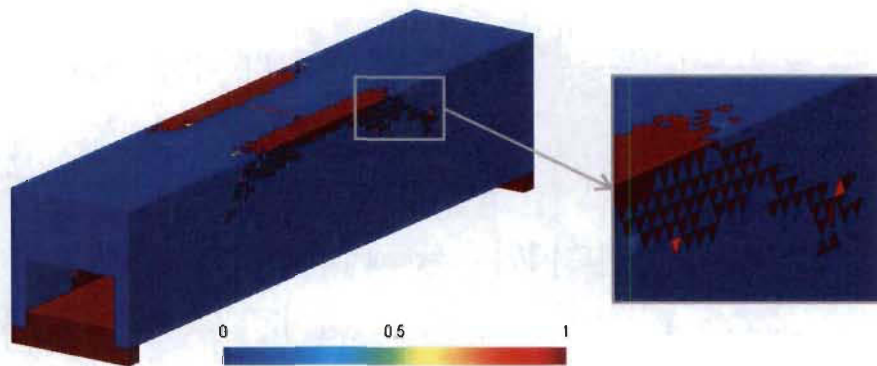


Figure 3-6 : Illustration de l'effet damier sur un résultat d'optimisation topologique.

En considérant un maillage uniforme, la dépendance de la solution optimisée au maillage sous-entend le fait de ne pas obtenir des solutions qualitativement équivalentes pour des tailles de mailles différentes [36]. Cela s'explique par le fait qu'un maillage fin permet une meilleure répartition de la densité de matière dans les éléments du maillage et, ce faisant, une certaine configuration de la solution optimisée, comparativement à un maillage grossier.

Plusieurs auteurs [36, 124-126] ont étudié l'apparition de l'effet damier et la réduction de la dépendance des résultats d'optimisation au maillage. Différentes solutions ont donc été proposées pour remédier à ces phénomènes indésirables. Citons d'un côté l'utilisation des éléments finis d'ordre supérieur (notamment des éléments finis quadratiques) qui permet de réduire l'apparition de l'effet damier à cause d'une meilleure modélisation numérique lors de l'analyse par éléments finis. D'un autre côté, la restriction de la variation de la densité, par exemple par addition d'une contrainte supplémentaire comme le contrôle du périmètre, qui limite le nombre de trous qui peuvent apparaître dans un résultat d'optimisation, réduisant de ce fait la possibilité de formation des solutions contenant des structures fines. Ces techniques ont été regroupées dans une catégorie appelée les techniques de restriction. Plus de détails sur ces techniques peuvent être retrouvés dans [125, 126].

En général, les techniques de restriction nécessitent des choix en fonction du problème, de la géométrie du modèle, et imposent l'ajout de paramètres supplémentaires à un problème d'optimisation qui en possède déjà plusieurs. Dans la même lancée, les éléments finis d'ordre supérieur imposent pour la méthode SIMP d'utiliser un coefficient de pénalisation p très faible ($< 2,3$), et occasionnent une perte en temps de calcul en raison notamment du nombre total de nœuds du maillage [36]. C'est pourquoi les techniques de filtrage sont préférées. Le filtrage est une solution alternative plus simple à mettre en œuvre et ne nécessite pas l'ajout de paramètres supplémentaires. Cette technique s'est avérée efficace dans l'obtention des résultats optimaux sans effet damier, tout en diminuant la dépendance au maillage de la solution optimisée. Le filtre supprime les grandes variations de la fonction considérée en tenant compte de son voisinage. Le filtrage à chaque itération de l'optimisation est une technique introduite par Sigmund et *al.* [123, 127] et consiste à assimiler, pour des modèles 2D, l'effet damier à du bruit et à faire une analogie avec la suppression de ce dernier dans les techniques de traitement d'images.

Dans la littérature, les techniques de filtrage courantes sont le filtrage de la sensibilité de la compliance et/ou le filtrage de la densité. Filtrer la sensibilité de la compliance $\partial \tilde{C} / \partial \rho_e$ consiste à modifier la sensibilité d'un élément spécifique en se basant sur une moyenne pondérée de la sensibilité des éléments dans son voisinage fixe [127]. En considérant un élément e de densité ρ_e , de volume V_e , constitutif d'un maillage de N éléments et ayant v voisins, le schéma de modification de la sensibilité de la compliance de l'élément e s'écrit [126] :

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e / V_e} \cdot \frac{\sum_{v=1}^{N_e} H_v \cdot \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \rho_v} \rho_v / V_v}{\sum_{v=1}^{N_e} H_v} \quad \text{Avec} \quad \begin{cases} H_v = (r_{\min c} - \text{dist}(e, v))^\kappa \\ v \in N_e \mid \text{dist}(e, v) \leq r_{\min c} \end{cases}, \quad e = 1, \dots, N \quad (3-14)$$

Où H_v est le facteur poids lié à chaque élément v , κ est un coefficient empirique permettant d'amplifier l'effet de $\text{dist}(e, v)$; $\text{dist}(e, v)$ représente la distance entre le centre de l'élément e et celui de l'élément v dans son voisinage ; $r_{\min c}$ est le rayon de la sphère centrée en l'élément e et dont les éléments internes sont employés pour le filtre,

comme sur la Figure 3-7 pour le cas d'un maillage 2D. Dans tous les exemples de ce document, $\kappa = 1$ a été utilisé.

Le poids H_v est nul hors de la zone de filtrage et décroît linéairement avec la distance à l'élément v . Lorsque $r_{minc} = 0$, le filtre n'est pas actif, et la solution converge vers la solution initiale avant filtrage. Lorsque r_{minc} croît, l'effet damier disparaît, et on remarque un épaissement des frontières structurelles au voisinage desquelles la variation de la densité de matière au passage solide-vide reste relativement brusque. Cela est illustré sur la Figure 3-8 où pour une faible valeur du rayon de filtrage on a un résultat semblable à celui de la Figure 3-6, et pour une valeur élevée on remarque un changement de topologie. Sur la Figure 3-8, la méthode SIMP a convergé après 14, 30 et 18 itérations, pour des valeurs respectives de r_{minc} de $0,25 \cdot \delta$, $1,25 \cdot \delta$ et $3,25 \cdot \delta$, δ étant la valeur locale de la taille du maillage.

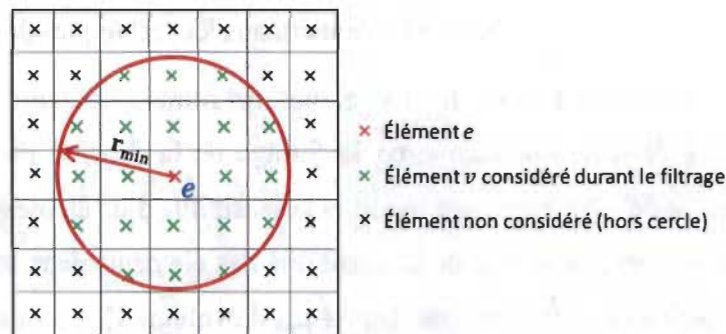


Figure 3-7 : Représentation des éléments pris en compte lors du filtrage.

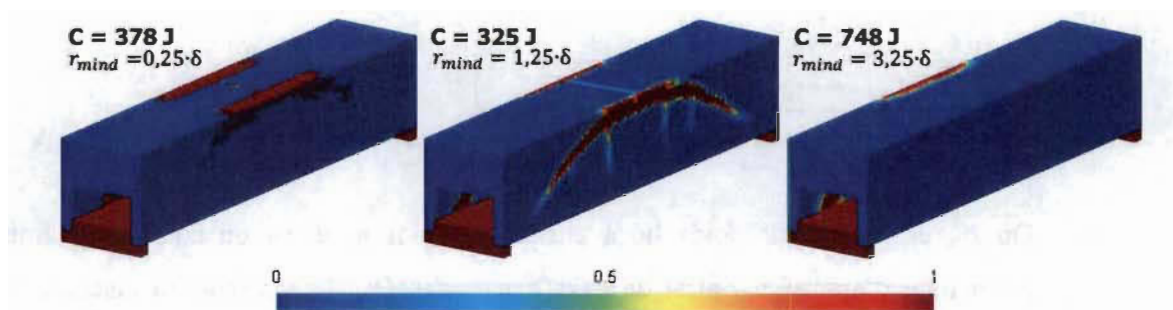


Figure 3-8 : Distribution optimale de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP en fonction de différentes valeurs du rayon de filtrage de la sensibilité de la compliance.

L'autre méthode de filtrage consiste à limiter la variation de la densité en n'admettant que des densités filtrées. Similairement au filtrage de la sensibilité de la compliance, la densité est remplacée par la moyenne pondérée des densités des éléments dans son voisinage. Dans le cas particulier du filtrage de la densité, il est important de mentionner que la densité filtrée $\bar{\rho}$ représente maintenant la densité physique des éléments ; la densité initiale ρ devient une variable intermédiaire dans le processus d'optimisation et de ce fait, n'a plus de sens physique [126]. La densité ρ_e d'un élément e sera modifiée par la densité filtrée $\bar{\rho}_e$ suivant l'équation [126] :

$$\bar{\rho}_e = \frac{\sum_{v=1}^{N_e} \omega_v \cdot \rho_v V_v}{\sum_{v=1}^{N_e} \omega_v \cdot V_v} \quad \text{Avec} \quad \omega_v = \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\text{dist}(e,v)}{\frac{r_{\text{mind}}}{3}} \right)^2 \right] \quad (3-15)$$

et $\{v \in N_e \mid \text{dist}(e,v) \leq r_{\text{mind}}\}$, $e = 1, \dots, N$

Dans cette équation, V_v est le volume de l'élément v , voisin de e . L'ajout de ce facteur permet de prendre en compte la variation de volume des éléments, surtout lorsque l'on a recours aux maillages tétraédriques comme dans ce projet. ω_v est une *fonction poids* Gaussienne du filtre. r_{mind} est le rayon de la sphère centrée en l'élément e et dont les éléments internes sont utilisés pour le filtre, comme illustré sur la Figure 3-7 pour le cas d'un maillage 2D. De façon similaire à l'effet de r_{mind} , lorsque r_{mind} tend vers 0 le filtre est inactif et l'effet damier est manifeste. Par contre, lorsque r_{mind} croît vers l'infini, toutes les sensibilités tendent à s'égaliser à cause de l'uniformisation de la distribution de la densité [1].

La Figure 3-9 illustre la distribution de la densité de matière après optimisation par la méthode SIMP où uniquement la densité a été filtrée et pour différentes valeurs du rayon de filtrage. Le processus de la méthode SIMP a convergé après 14, 24 et 22 itérations, pour des valeurs respectives de r_{mind} de $0,25 \cdot \delta$, $1,25 \cdot \delta$ et $3,25 \cdot \delta$, où δ est la valeur locale de la taille du maillage. Comme mentionné précédemment, une faible valeur du rayon r_{mind} annihile l'action escomptée du filtrage et donne un résultat d'optimisation ayant une transition brusque entre la partie solide et la partie vide. Le résultat obtenu est

presque identique à celui de la Figure 3-8 pour $r_{minc} = 0,25 \cdot \delta$. Cependant, un rayon trop élevé étale la frontière structurale qui devient floue et difficile à déterminer.

Dans les exemples de ce document où ce filtrage est appliqué, le rayon de filtrage est $r_{mtnc} = r_{mind} = r_{min} = 1,25 \cdot \delta$ et le filtrage de la densité est effectué à chaque itération de la méthode SIMP en utilisant l'équation 3-15.

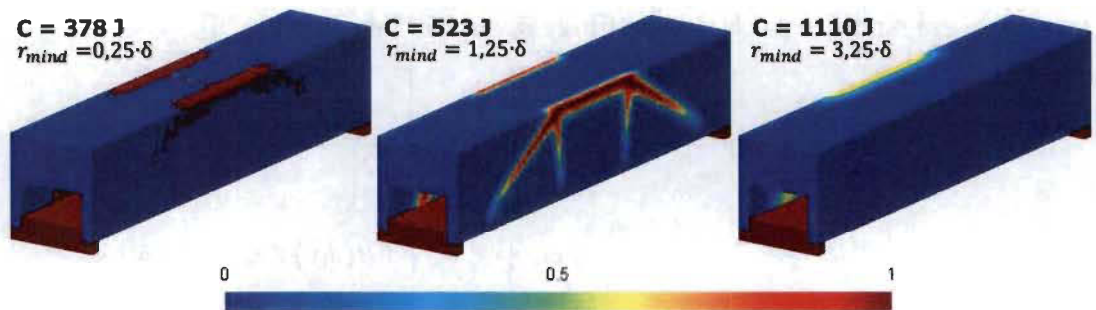


Figure 3-9 : Répartition de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP en fonction de différentes valeurs du rayon de filtrage de la densité.

La Figure 3-10 présente un comparatif entre différents résultats d'optimisation topologique en fonction du filtrage. Elle illustre un éventail des répartitions de la densité à la fin du processus d'optimisation par la méthode SIMP où aucun filtrage n'a d'abord été effectué, puis en filtrant respectivement et à chaque itération, uniquement la sensibilité de la compliance, la densité, et à la fois la sensibilité de la compliance et la densité. Cette figure donne également les compliances finales, obtenues respectivement après 14, 30, 24 et 21 itérations. Les paramètres de la méthode SIMP utilisés sont les mêmes dans tous les cas. Ils sont regroupés dans le Tableau 3-1.

La configuration de la Figure 3-10a (sans filtrage) possède une rigidité artificielle élevée comparée à celle d'un matériau uniformément réparti et ce, en raison d'une mauvaise modélisation numérique qui surestime la rigidité des damiers [1]. Lors du filtrage de la sensibilité de la compliance (Figure 3-10b), la zone à l'interface entre la partie pleine de matière (en rouge) et la partie vide (en bleu) est très mince, presque tranchante. On voit

par exemple qu'une seule rangée d'éléments constitue la transition matière-vide. Les filtrages de la densité et à la fois de la densité et de la sensibilité de la compliance (Figure 3-10c et Figure 3-10d) règlent le problème de discontinuité précédent en permettant un étalement de la frontière structurelle du modèle optimisé sans toutefois la détruire. La transition devient graduelle et s'effectue sur plusieurs rangées d'éléments. Ainsi peut-on dire que similairement à un filtre passe-bas pour image, le filtrage appliqué étale la frontière sans pour autant la détruire, supprime le bruit (l'effet damier) par élimination des valeurs élevées et réduit la dépendance au maillage en remplaçant les valeurs élevées par la moyenne de leur voisinage. Cependant, la compliance finale étant meilleure lors du filtrage uniquement de la densité (Figure 3-10c), c'est ce dernier qui sera utilisé dans la suite de ce travail.

Tableau 3-1 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille (écart nodal) du maillage	250mm
f	Fraction volumique	5 %
p	Coefficient de pénalisation	3
r_{min}	Rayon de filtrage	$1,25 \cdot \delta$
ρ_{vide}	Limite inférieure de la densité	0,001
m	Limite de variation de la densité entre 2 itérations	0,2
η	Coefficient d'amortissement	0,5
κ	Coefficient empirique amplifiant l'effet de $dist(e, v)$	1
Δ	Critère de convergence de la méthode SIMP	0,5 %

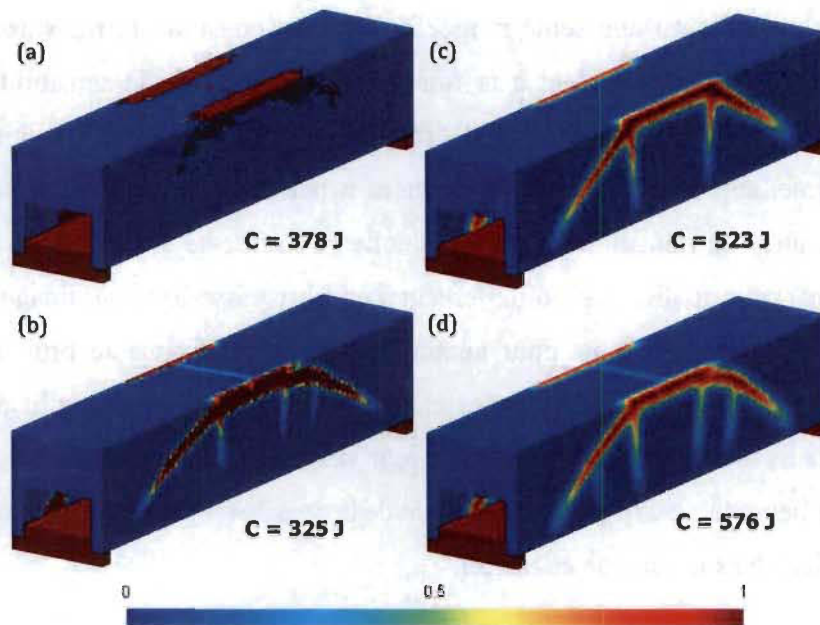


Figure 3-10 : Comparatif des différents filtrages. Résultats de la méthode SIMP avec (a) aucun filtrage, (b) filtrage de la sensibilité de la compliance, (c) filtrage de la densité et (d) filtrage de la sensibilité de la compliance et de la densité.

3.3.7 Résultats de la méthode SIMP

La Figure 3-11 présente la répartition de la densité de matière dans le domaine de *design* à la fin du processus d'optimisation par la méthode SIMP, ainsi que les coupes longitudinales associées (Figure 3-11a, Figure 3-11b et Figure 3-11c). Le processus a convergé au bout de 24 itérations et la compliance finale est $\tilde{C} = 523 \text{ Joules}$. Le modèle optimisé consiste en des éléments de maillage qui dépendent d'une densité d'extraction notée ρ_{seuil} . Les éléments pour lesquels $\rho \geq \rho_{seuil}$ sont conservés et ceux dont $\rho < \rho_{seuil}$ sont désactivés, car considérés comme vides. Ces derniers ne font pas partie du modèle optimisé. Les Figure 3-11d, Figure 3-11e et Figure 3-11f donnent une bonne illustration de la forme optimisée pour différentes valeurs de la densité d'extraction ρ_{seuil} .

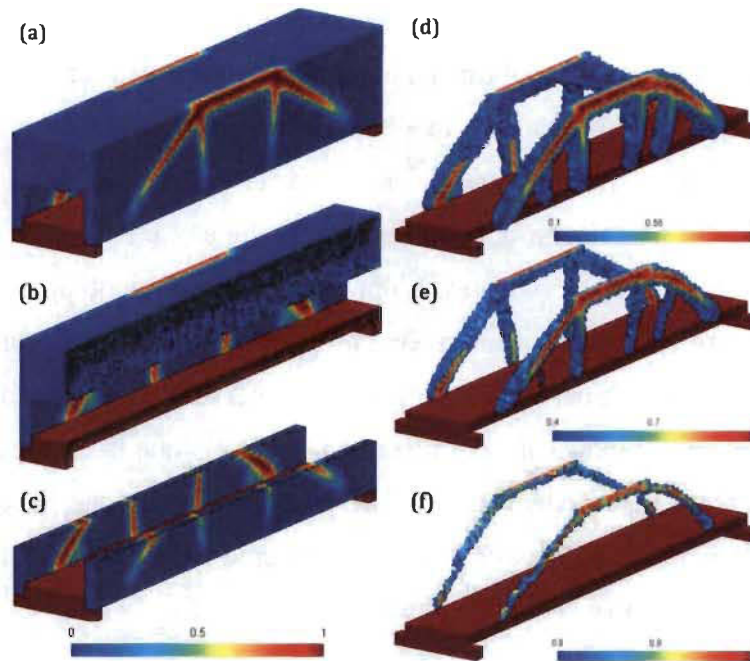


Figure 3-11 : (a) Résultat de la méthode SIMP, (b) et (c) les coupes longitudinales de (a), ainsi que les formes optimisées pour $\rho_{seuil} =$ (d) 0,1, (e) 0,4 et (f) 0,8.

3.3.8 Vers l'interprétation des résultats de la méthode SIMP

Comme brièvement mentionnées dans la section 2.7, plusieurs avenues s'offrent au concepteur pour post-traiter les résultats de la méthode SIMP. La première avenue est la reconception du modèle à partir de la suggestion géométrique du modèle optimisé. La pièce est ensuite maillée puis analysée par éléments finis afin de satisfaire le cahier des charges. Cette boucle de reconception manuelle continue jusqu'à ce que le cahier des charges soit satisfait. Ce processus peut facilement se révéler long, fastidieux et n'est pas automatique. La seconde avenue est d'appliquer une méthode de lissage afin d'obtenir des surfaces lissées propres à la fabrication par addition de matière. Toutefois, l'irrégularité notable de l'enveloppe du résultat brut de l'optimisation compromet cette étape et le lissage du maillage découlant, indispensable à l'analyse par éléments finis, n'est pas trivial. De plus, certaines modifications sont à prévoir pour rencontrer les exigences de la fabrication additive comme la taille du modèle à cause de la taille du bain de fusion par

couches associé, la présence de zones trop fines dans la pièce ou encore la nécessité de supports. Une autre possibilité pour le concepteur est de procéder à des modifications en amont de l'optimisation. Ces modifications comprennent notamment la prise en compte des contraintes (géométriques, tension locale ou globale, etc.) et de la méthode de fabrication. La solution obtenue peut par la suite être rebâtie en utilisant une des deux méthodes en aval précédentes. L'optimisation topologique proposant généralement des formes très originales, l'interprétation du modèle optimisé peut s'avérer onéreuse en temps, puisqu'elle nécessite l'intégration de plusieurs critères parfois difficiles à concilier. On parle non seulement des critères objectifs tels que la fabricabilité, la rigidité et les contraintes, mais également des critères subjectifs tels que l'acceptabilité de la forme optimisée ou encore son esthétisme (par exemple surface lisse aux formes organiques avec variations brusques) et sa complexité dimensionnelle.

L'apport de ce projet de recherche réside dans l'interprétation directe du résultat de la méthode SIMP en un modèle CAO afin notamment de bénéficier des avantages des moyens traditionnels de fabrication. Pour ce faire, un lissage du modèle optimisé est effectué et ce, dans le but de le convertir en modèle CAO. La purge des éléments de densité inférieure au seuil de densité étant à l'origine du maillage grossier du modèle optimisé pour lequel les méthodes usuelles de lissage ne sont pas seyantes, nous allons préalablement affiner ce modèle à travers plusieurs adaptations de son maillage.

3.4 Méthode SIMP adaptative

La méthode SIMP distribue de manière optimale la matière dans les éléments du maillage d'un modèle. La Figure 3-12 illustre l'évolution de la compliance obtenue à la fin du processus d'optimisation avec la taille du maillage. On constate que la résolution géométrique du modèle optimisé et la valeur de la compliance obtenue sont tributaires du degré de raffinement du maillage. Par exemple, pour des maillages uniformes de taille $d_g = 1000mm$, $600mm$ et $200mm$ l'on obtient respectivement comme compliance $811 J$, $773 J$ et $433 J$. Cette décroissance de la compliance est corrélée avec l'amélioration

de la répartition de la matière qui est de mieux en mieux distribuée dans les éléments du maillage. C'est ainsi que la structure tend à se rigidifier au fur et à mesure que le maillage est uniformément raffiné. Plus encore, le résultat obtenu avec des éléments fins semble plus facile à interpréter et ce, du fait d'une meilleure capture de la silhouette optimisée et de l'amélioration de la description des frontières structurales. Ainsi, il serait opportun d'insérer une stratégie d'adaptation de maillage dans le processus d'optimisation afin d'augmenter la qualité des résultats [128].

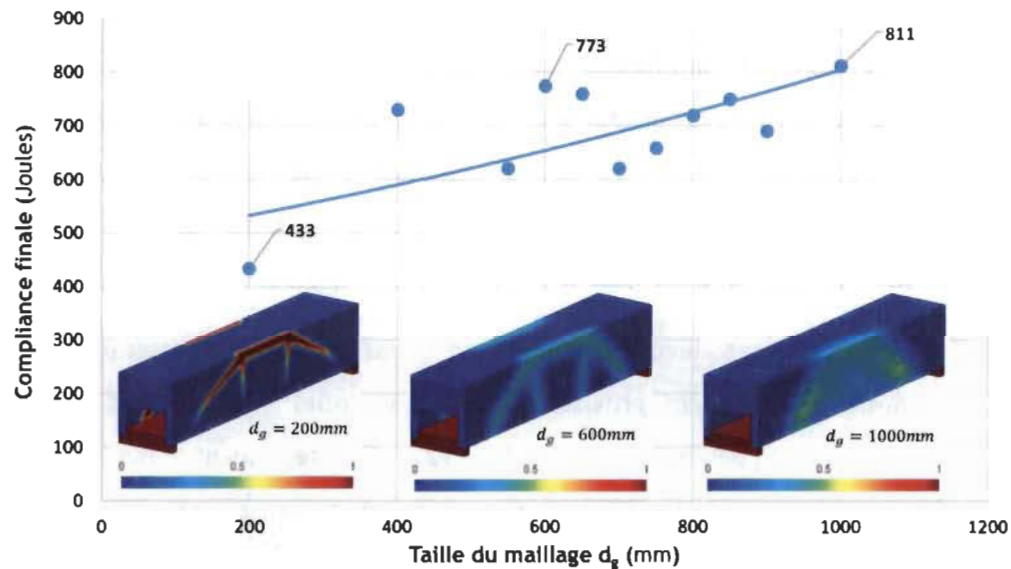


Figure 3-12 : Évolution de la compliance finale et de la distribution optimale de la densité en fonction de la taille du maillage.

L'idéal est que, partant d'un maillage relativement grossier, l'on obtienne un résultat final similaire à celui que l'on aurait obtenu en utilisant un maillage fin, mais sans avoir à raffiner tout le modèle. De plus, comme le soutient Bendsoe et al. [1] : *"Idéalement le raffinement de maillage devrait aboutir à une meilleure modélisation par éléments finis de la même structure optimale et à une meilleure description des frontières structurales, mais non pas à une structure plus détaillée et qualitativement différente."*

3.4.1 Principe de l'adaptation

Le résultat de la méthode SIMP contient des densités intermédiaires difficiles à interpréter au sens physique. Ceci augmente la difficulté lors de l'extraction de la forme optimisée, puisque ces densités intermédiaires se trouvent, à juste titre, à l'interface matière-vide. C'est ainsi que Ramm et *al.* [129] avaient émis l'idée de recourir à la variation de la densité de matière dans un modèle comme critère de raffinement d'un résultat d'optimisation topologique. La stratégie d'adaptation du maillage développée dans cette thèse (voir Figure 3-13), qui comprend un raffinement et un déraffinement automatiques et simultanés après chaque optimisation, s'inspire de cette idée. L'adaptation permet d'ajuster la résolution spatiale du maillage uniquement au niveau de l'interface matière-vide, afin de permettre une meilleure distribution de la matière dans cette zone de grand intérêt. En même temps le reste du maillage est déraffiné, car la précision de calcul n'est plus nécessaire dans cette zone.

La stratégie développée commence par une 1^{re} optimisation avec un maillage uniforme relativement grossier. Il n'y a en effet aucun besoin d'avoir dès la 1^{re} optimisation un résultat très précis [81, 129]. Non seulement le maillage uniforme initial doit être assez grossier pour donner une rapide approximation de la forme optimisée, mais aussi, il doit être assez fin pour en saisir toutes les singularités. Le critère de convergence de la méthode SIMP est également adapté, et décroît au fil des adaptations du maillage [81]. La première SIMP ayant convergé, il s'en suit la détermination des zones à raffiner et celles à déraffiner par calcul de la norme du gradient densité. Les zones à gradient élevé sont raffinées, tandis que celles à gradient faible ou nul sont déraffinées. En effet, une valeur élevée de la norme du gradient signifie une forte variation de la densité de matière, tandis qu'une valeur faible ou nulle signifie des variations faibles ou nulles de la densité. Une nouvelle carte de taille est alors construite en tenant compte de la norme du gradient précédemment calculée. La construction de cette carte est effectuée à l'aide d'une fonction d'adaptation. Dans cette nouvelle prescription de tailles, des éléments de taille plus grosse que la taille du maillage uniforme initial sont prescrits dans les zones de norme du gradient

de densité faible, pendant que ceux de taille plus petite que la taille du maillage uniforme initial sont prescrits dans les zones de norme du gradient de densité élevée : c'est la *première adaptation*. Le modèle est par la suite entièrement remaillé avec cette nouvelle carte de taille, et il s'ensuit une nouvelle optimisation par la méthode SIMP. Le résultat de cette 2^e optimisation est une répartition de la densité dans les éléments du maillage précédemment adapté. La norme du gradient de densité est évaluée par après. Une nouvelle carte de taille s'appuyant sur ce gradient est calculée et le modèle entièrement maillé : c'est la *deuxième adaptation*. La boucle optimisation-gradient-adaptation continue tant que le nombre maximal d'adaptations n'est pas atteint, comme effectué par plusieurs auteurs dans la littérature [76, 79, 82].

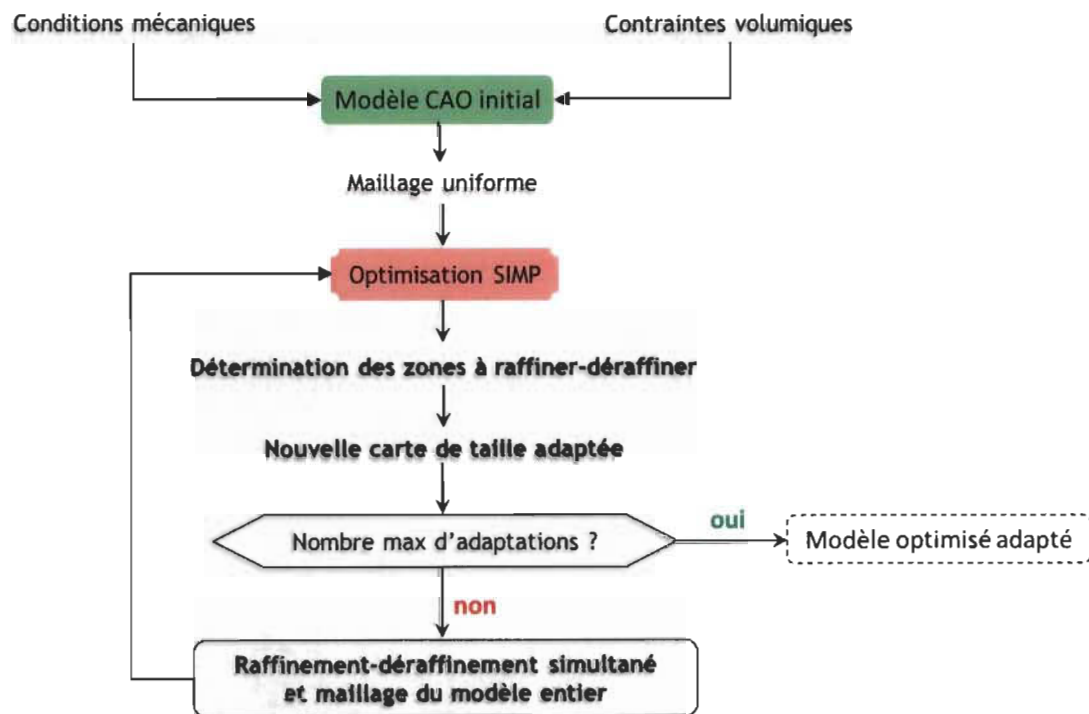


Figure 3-13 : Algorithme de la SIMP adaptative.

3.4.2 Détermination des zones d'intérêt

La détermination des zones à raffiner et à déraffiner du modèle est l'élément-clé de la stratégie d'adaptation de maillage proposée. Une zone à raffiner plus grande que nécessaire ou un déraffinement insuffisant se solderait par un raffinement dans des endroits sans intérêt. On obtiendrait donc une certaine précision des résultats dans une zone où ce niveau de précision n'est pas requis. De même, un raffinement insuffisant ou un déraffinement excessif pourrait aboutir à une absence de précision dans une zone où celle-ci est effectivement requise. Plus encore, cette étape de la stratégie doit être automatique, afin de réduire, voire supprimer, la nécessité de l'intervention humaine.

Le gradient d'un champ scalaire est un vecteur qui indique comment varie ladite grandeur dans l'espace et est dirigé dans la direction de plus forte variation. Dans le cadre de nos recherches, le gradient de densité décrit la variation de la densité dans le modèle. La norme de ce vecteur est utilisée non seulement comme outil de détermination des zones d'intérêt du maillage, mais également comme un des facteurs de la fonction d'adaptation.

Considérant une répartition de la densité de matière dans les éléments d'un maillage tétraédrique linéaire et considérant aussi un nœud i du maillage appartenant à n tétraèdres de volume respectif V_v , le vecteur gradient de densité $\{\overrightarrow{grad}(\rho_e)\}$ dans un élément e est calculé connaissant les densités ρ_i aux nœuds i de e . Ces dernières sont extrapolées à partir de ρ_v , la densité dans chaque élément v voisin de i . Ceci s'effectue par l'équation :

$$\{\overrightarrow{grad}(\rho_e)\} = [j] \cdot [\partial N_i] \cdot \{\rho_i\} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} [j] = Inv[J] \text{ et} \\ \{\rho_i\} = \frac{1}{\sum_{v=1}^n V_v} \cdot \sum_{v=1}^n (\rho_v \cdot V_v) \end{cases} \quad (3-16)$$

Où $[j]$ est l'inverse de la matrice Jacobienne $[J]$ de la transformation de l'espace réel (x, y, z) vers l'espace de référence (ξ, η, ς) pour le tétraèdre linéaire e considéré ; $[\partial N_i] = \partial_{(\xi, \eta, \varsigma)} N_i$ est la matrice des dérivées partielles des fonctions d'interpolation N_i [130].

En associant l'indice de chaque nœud du tétraèdre avec ses coordonnées (x, y, z) , on a :

$$[J] = \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) & (y_2 - y_1) & (z_2 - z_1) \\ (x_3 - x_1) & (y_3 - y_1) & (z_3 - z_1) \\ (x_4 - x_1) & (y_4 - y_1) & (z_4 - z_1) \end{bmatrix}, [\partial N_i] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{\rho_i\} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

En fait, l'on a au départ une solution discrète, soit une répartition de la densité constante par élément du maillage. Cependant, l'on a besoin d'une répartition continue de la densité afin d'en calculer le gradient. C'est l'une des raisons pour lesquelles la densité est filtrée durant l'optimisation (équation 3-15). Par la suite, la densité par élément est extrapolée aux nœuds, puis utilisée pour calculer le gradient. Il en résulte un gradient également constant par élément (équation 3-16). Ce dernier est à son tour extrapolé aux nœuds et utilisé dans la construction de la carte de taille pour le maillage adapté.

La Figure 3-14 illustre la répartition de la norme du gradient de densité extrapolée à chaque nœud du maillage du modèle *cas test*. Le résultat de l'optimisation utilisé y est également présenté et est le même que celui de la Figure 3-11a.

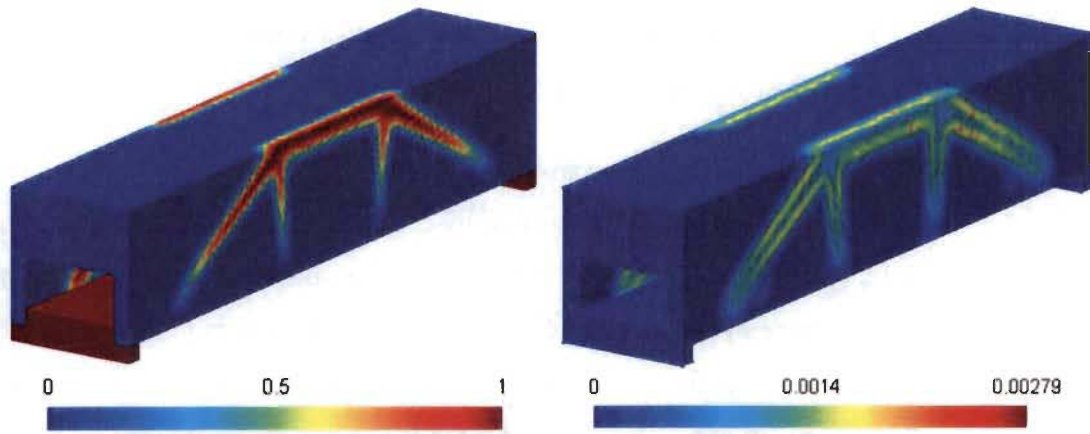


Figure 3-14 : Répartition (a) de la densité à la fin de la SIMP et (b) de la norme du gradient de densité.

Il apparaît sur cette figure que les valeurs élevées de la norme du gradient de densité ne sont observées qu'aux frontières structurales du résultat optimisé, alors que le reste du maillage a des valeurs faibles et nulles, particulièrement dans les zones considérées

comme vides ou pleines. Ceci se justifie par le fait que dans les zones totalement remplies de matière ou complètement vides, la densité varie très peu ou pas, alors que dans la zone de transition, à l'interface matière-vide, la densité varie fortement. On remarque également que les zones à raffiner ne représentent qu'une infime portion du domaine entier, d'où la nécessité d'effectuer un déraffinement dans les autres zones qui représentent une plus grande portion.

Dans la suite de ce document et sauf mention contraire, lorsque le terme de gradient de densité, ou de norme du gradient de densité sera employé, cela sous-entend la norme du vecteur gradient de la densité de matière $\|\overrightarrow{\text{grad}}(\rho(x, y, z))\|$.

3.4.3 Fonction d'adaptation du maillage

La zone de transition matière-vide étant détectée, il ne reste plus qu'à construire la fonction d'adaptation associée. Cette fonction donne la prescription de la taille pour le remaillage. Elle permet de recouvrir le modèle d'éléments finis de tailles variables et donc, de le densifier ou le clairsemer lorsque cela est nécessaire. La stratégie d'adaptation à concevoir doit respecter plusieurs conditions qui sont :

a. Utiliser des éléments finis conventionnels.

En effet, plusieurs techniques ont déjà été développées afin d'obtenir des résultats d'optimisation topologique plus élaborés (voir sous-section 2.8.1). Cependant, une des limites relevées était la nécessité par certains auteurs [75, 79, 81, 82] de faire usage d'éléments finis non conventionnels (exemple du triangle à 4 nœuds) dans la zone de transition matière-vide. Ceci rendait moins générale leur approche.

b. Tenir compte de manière automatique des résultats d'optimisation.

En effet, le but de l'adaptation dans ce projet est d'augmenter la qualité d'un résultat d'optimisation topologique que l'on a déjà. Nous parlons essentiellement de la description des frontières structurelles, de la répartition de la matière et de la valeur

finale de la compliance. Il faut donc prendre en compte automatiquement les solutions préalablement obtenues pour générer le maillage subséquent.

c. Ne pas modifier la forme optimisée initiale.

En effet, la première optimisation, basée sur un maillage uniforme, est considérée comme suffisamment proche d'un optimum. Le but de l'adaptation n'est pas de modifier la solution initiale, mais de l'améliorer. L'adaptation ne doit donc pas changer la forme optimisée initiale, mais plutôt enrichir le maillage au niveau des frontières structurelles afin de mieux les définir.

d. Être relativement peu coûteuse.

En effet, si densifier uniformément le maillage d'un modèle permet d'obtenir une meilleure précision de la solution par analyse par éléments finis, cela impacte en retour le coût, qui comprend notamment le temps de calcul. Plus un maillage sera dense, plus le temps de calcul sera long. L'adaptation doit donc non seulement raffiner l'interface matière-vide de la solution optimisée, mais également déraffiner simultanément pour une efficacité substantielle, le reste du maillage.

e. Être flexible dans son utilisation.

En effet, l'opérateur doit être capable, au moins dans une certaine mesure, de contrôler la variation de la taille des éléments du maillage. Ceci devrait être effectué à l'aide de paramètres simples et faciles à manipuler.

Afin de construire la fonction d'adaptation utilisée pour prescrire la taille du maillage au cours des adaptations, l'évolution de la valeur maximale du gradient de densité en fonction de la taille du maillage a été étudiée. La Figure 3-15 schématise la variation du gradient maximal de densité du modèle *cas test* en fonction de la taille uniforme du maillage qui a des valeurs entre 200 mm à 1000 mm.

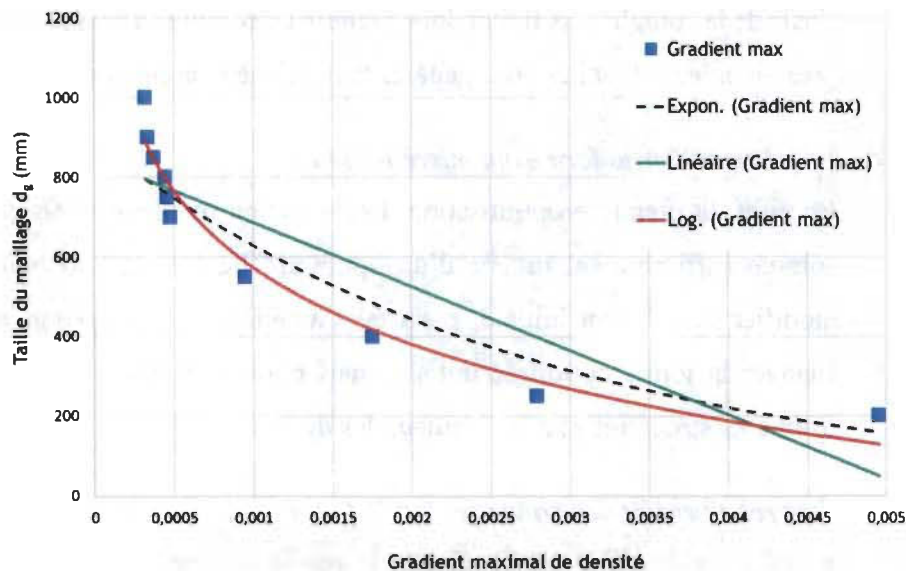


Figure 3-15 : Évolution du gradient maximal de densité avec la taille du maillage.

Il ressort de cette figure que le gradient maximal, de façon globale, croît inversement avec la taille du maillage. Cela s'explique par le fait que plus le maillage est fin, mieux la densité est distribuée dans ses éléments, ce qui fait que les densités intermédiaires sont moins étalées (voir également résultats de la SIMP sur la Figure 3-12). Cette même tendance étant observée sur plusieurs modèles différents, elle est considérée comme assise pour l'élaboration de la fonction d'adaptation proposée. Plusieurs courbes ont été étudiées pour mieux matérialiser cette tendance. Afin de respecter les conditions **a.** à **e.** mentionnées au début de cette sous-section, la fonction d'adaptation devait :

- Prescrire des petites tailles de mailles pour des valeurs élevées du gradient de densité
- Prescrire de grandes tailles de mailles pour de faibles valeurs du gradient de densité
- Prescrire une taille maximale de mailles pour les valeurs nulles du gradient de densité
- Ne jamais prescrire une taille de mailles nulle.

Ces critères de choix ont permis de préférer l'approximation de la tendance observée sous forme d'une exponentielle, modélisée ainsi qu'il suit :

$$d_j(x, y, z) = \begin{cases} d_g & \text{si } j = 0 \\ E_{nm} \cdot e^{-\chi \cdot d_g \cdot \|\overrightarrow{\text{grad}}(\rho_{j-1}(x, y, z))\|} & \text{si } j > 0 \end{cases} \quad \text{avec } E_{nm} > d_g \quad (3-18)$$

Où $d_j(x, y, z)$ est la taille du maillage prescrite lors de l'adaptation j aux coordonnées (x, y, z) ; E_{nm} est l'écart nodal maximal qui doit être supérieur à la taille du maillage uniforme initial d_g et χ est un coefficient sans dimension.

En observant la fonction proposée on remarque que E_{nm} est le paramètre lié au déraffinement et χ le paramètre lié au raffinement. Il apparaît également que l'exponentielle permet de garantir de ne jamais prescrire une taille nulle quel que soit la valeur de la norme du gradient. Suivant le principe de la méthode SIMP adaptative, l'adaptation à $j = 0$ est le maillage uniforme initial. La carte de taille correspondante est $d_0(x, y, z) = d_g$. En effectuant une optimisation (la 1^{re} SIMP) sur ce maillage, on obtient la solution $\rho_0(x, y, z)$. $\|\overrightarrow{\text{grad}}(\rho_0(x, y, z))\|$ est ensuite calculée et la nouvelle carte de taille $d_1(x, y, z)$, qui correspond à la 1^{re} adaptation, est construite par après, et utilisée pour remailler le modèle entier. Une nouvelle optimisation (la 2^e SIMP) est effectuée, son résultat c'est $\rho_1(x, y, z)$, puis la boucle gradient-adaptation-optimisation continue tant que le nombre d'adaptations maximal n'est pas atteint.

3.4.4 Paramètres de la fonction d'adaptation

La fonction d'adaptation présentée fait intervenir deux paramètres que sont χ et E_{nm} . χ affecte la diminution de la taille des mailles et E_{nm} permet de se prévaloir d'un grossissement du maillage. En considérant un maillage uniforme initial $d_g = 250\text{mm}$, la Figure 3-16 révèle l'évolution de la taille prescrite en fonction de χ pour une valeur fixe de $E_{nm} = 400\text{mm}$. On constate par exemple que pour un gradient de 0,0015, la taille prescrite sera de 189mm ($< 250\text{mm}$ donc raffinement) et 332mm ($> 250\text{mm}$ donc déraffinement) pour des valeurs respectives de χ de 2 et 0,5.

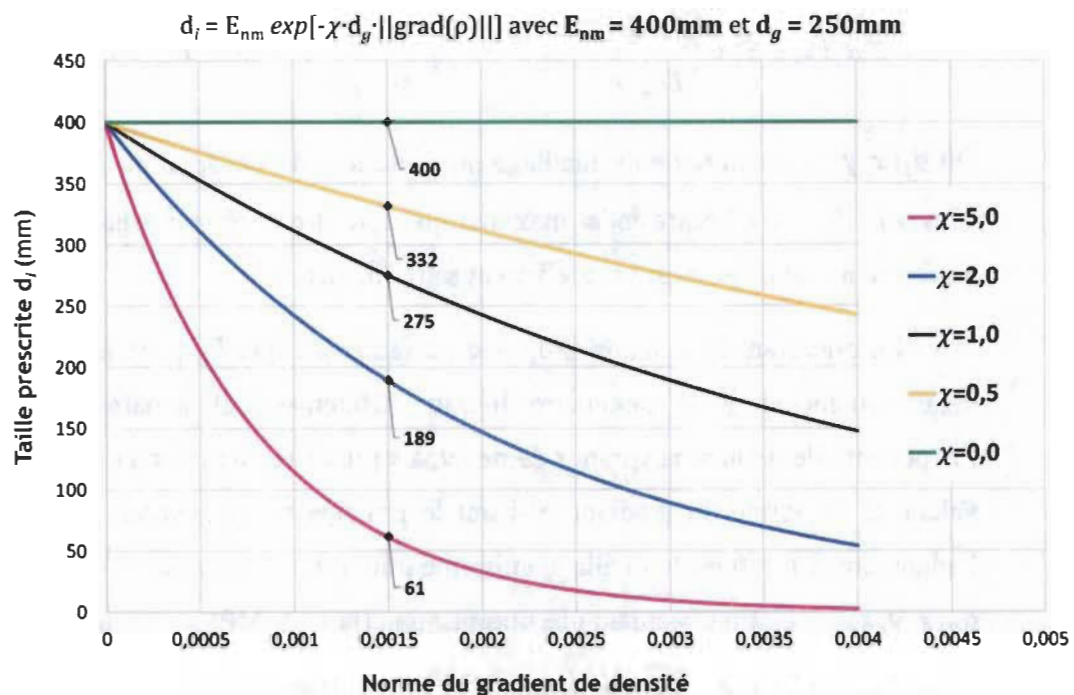


Figure 3-16 : Évolution de la taille du maillage en fonction de χ pour E_{nm} fixé.

On voit que plus le coefficient χ est élevé, plus le raffinement est sévère ; le maillage devient plus dense dans les zones considérées et les tailles de mailles plus petites. Le cas $\chi = 0$ correspond à une absence de raffinement. Ce cas n'est évidemment pas souhaitable, dans la mesure où il correspond à une situation où le maillage est uniformément déraffiné, c'est-à-dire maillé avec la taille E_{nm} .

La Figure 3-17 présente l'évolution de la taille prescrite du maillage adapté pour différentes valeurs de E_{nm} et pour une valeur fixe de $\chi = 1,75$. Pour toutes les valeurs de E_{nm} on considère une taille du maillage uniforme initial inférieure à la valeur de E_{nm} . Le déraffinement intervient dans les zones de faibles valeurs ou de gradient de densité nul. La taille des mailles dans ces zones sera proche ou égale à la valeur de la taille maximale E_{nm} donnée en entrée par l'opérateur.

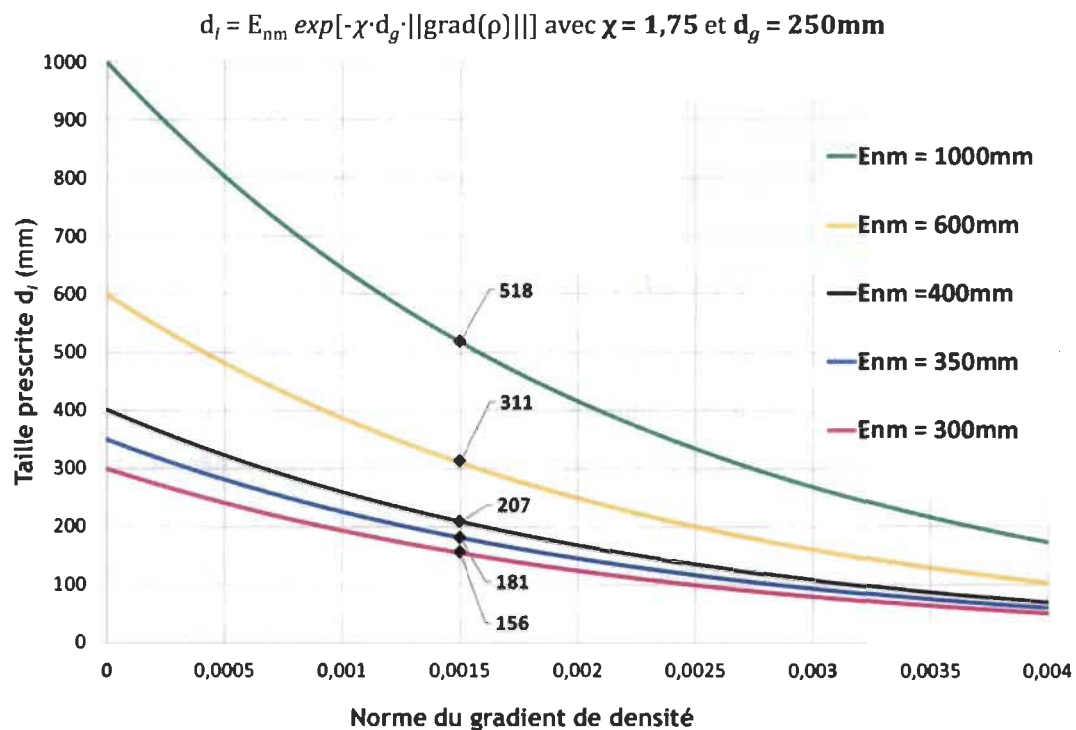


Figure 3-17 : Évolution de la taille du maillage en fonction de E_{nm} pour χ fixé.

Considérons le même maillage uniforme de taille $d_g = 250\text{mm}$ et $\chi = 1,75$. Tous les éléments de gradient inférieur à 0,00050, 0,00075, 0,0010, 0,0020 et 0,00325 seront déraffinés suivant la fonction d'adaptation pour des valeurs respectives de E_{nm} de 300mm, 350mm, 400mm, 600mm et 1000mm. Par exemple, pour un gradient de 0,0015, la taille prescrite sera de 181mm ($< 250\text{mm}$ donc raffinement) et 311mm ($> 250\text{mm}$ donc déraffinement) pour des valeurs respectives de E_{nm} de 350mm et 650mm. On peut dire que plus E_{nm} croît, plus le déraffinement s'accroît.

Au final, le couple (E_{nm}, χ) doit être choisi en fonction de l'objectif. À cet effet, il a été observé de manière empirique que si la priorité de l'adaptation est le raffinement, un coefficient χ élevé est préconisé. Dans le cas contraire, une valeur élevée de E_{nm} est préférable. Un mauvais choix de ce couple peut se solder par un nombre inutilement élevé d'adaptations ou l'obtention de résultats inattendus. À ce stade de nos travaux, l'influence

de l'un par rapport à l'autre aussi bien que les critères de choix de ces derniers restent à établir. Aussi, aucune précaution n'est prise pour limiter le gradient de la taille des mailles dans un espace souvent exigu, ce qui favorise la création des éléments de mauvaise qualité. Pour l'instant, uniquement la taille maximale E_{nm} est fixée.

3.4.5 Adaptation du filtrage de la densité

Comme présenté dans la sous-section 3.3.6, lors de l'optimisation topologique par la méthode SIMP une technique de filtrage est employée pour pallier à l'apparition de certains phénomènes non désirables. Dans l'approche proposée, le filtrage de la densité revêt un objectif supplémentaire pour l'exploitation des résultats d'optimisation. En effet, au-delà de limiter l'apparition de l'effet damier et la dépendance du résultat de l'optimisation au maillage, le fait de filtrer la densité augmente la zone de transition matière-vide. La répartition de la densité à la frontière structurelle du résultat optimisé devient alors étalée sans être floue, continue et donc adéquate pour un calcul du gradient de densité. Pour ce faire, l'on a recours à un rayon de filtrage isotrope (voir Figure 3-18a) qui ne fonctionne pas correctement avec un maillage à forte gradation de tailles.

En effet, comme le montre la Figure 3-19, l'application de ce rayon sur des maillages adaptés conduit à des formes optimisées différentes de celle de la forme optimisée initiale. On dirait que l'adaptation a plutôt dégradé la qualité du résultat optimisé, au lieu de l'améliorer. Lors de la SIMP adaptative, l'adaptation provoque une grande variation de la taille des mailles sur l'étendue du maillage. Dans ce cas, le nombre d'éléments voisins pour un élément e autour de la frontière structurelle varie fortement, impactant par conséquent la répartition de la densité de matière (voir Figure 3-18b). L'adaptation du maillage impose donc une adaptation du filtrage.

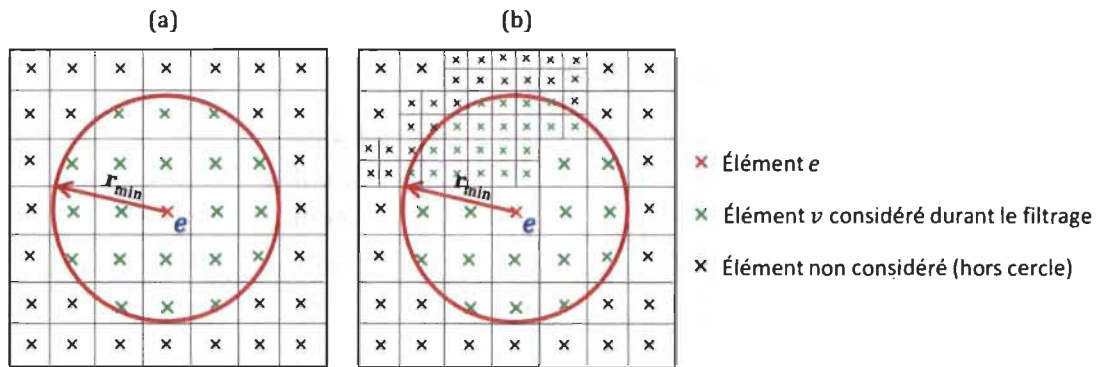


Figure 3-18 : Éléments pris en compte lors du filtrage d'un maillage (a) uniforme et (b) adapté.

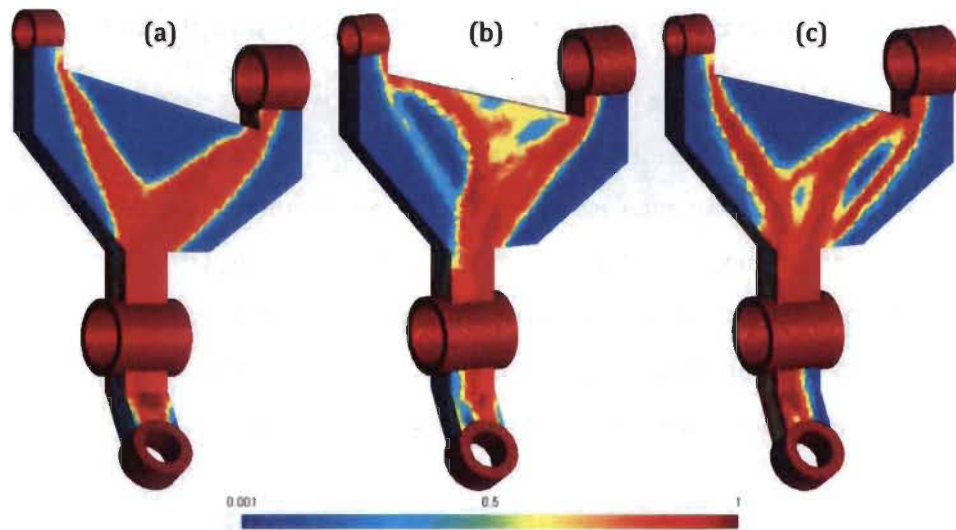


Figure 3-19 : Illustration de l'effet du rayon de filtrage isotrope. Répartitions optimales de la densité à la fin de la SIMP sur (a) le maillage uniforme initial et après (b) la 1^{re} et (c) la 2^e adaptation du maillage (tirée de Nana et al. [15]).

Comme illustré sur la Figure 3-20, l'on définit un rayon de filtrage en fonction des couches d'éléments voisins. En considérant un élément e du maillage tétraédrique, les voisins de 1^{er} ordre sont tous les éléments ayant un nœud, un segment, ou un triangle en commun avec e . De même, les voisins de 2^e ordre seront les voisins des éléments de 1^{er} ordre et ainsi de suite. Ce type de filtrage paraît mieux concorder avec la gradation du maillage.

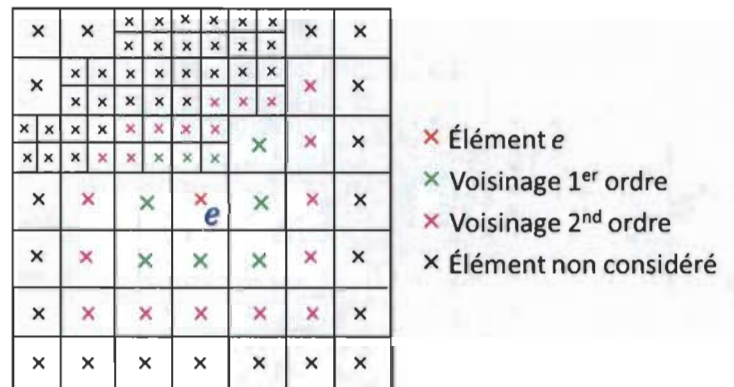


Figure 3-20 : Illustration des éléments pris en compte lors du filtrage adapté.

3.4.6 Critère d'arrêt de la méthode SIMP adaptative

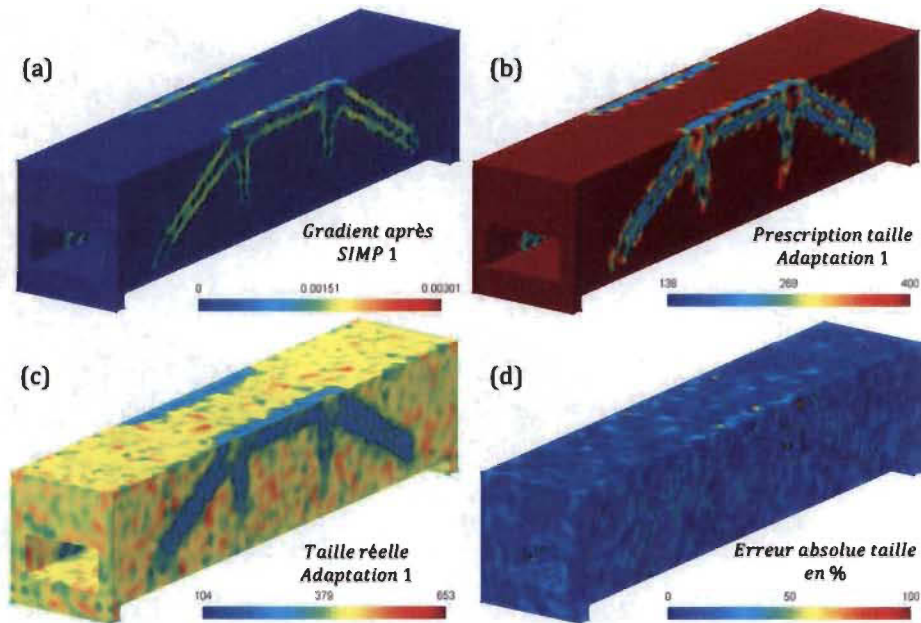
L'algorithme de la méthode SIMP adaptative proposée est itératif, étant donné qu'il procède à des améliorations successives. Après chaque optimisation, le maillage est adapté en conséquence et une nouvelle optimisation est effectuée. Dans la présente approche, la boucle itérative de la méthode SIMP adaptative continue jusqu'à ce que, comme proposé par certains auteurs [76], un nombre maximal d'adaptations fixé par l'opérateur soit atteint. Ainsi, similairement aux travaux de [76, 79, 82], les résultats présentés dans cette thèse sont limités à 2 niveaux d'adaptation.

3.4.7 Résultats de la méthode SIMP adaptative

Dans cette sous-section, la méthode SIMP adaptative telle que présentée jusqu'ici est appliquée au modèle *cas test*. Les paramètres de la méthode SIMP sont les mêmes que ceux répertoriés dans le Tableau 3-1. À ces derniers s'ajoutent les paramètres de l'adaptation (E_{nm}, χ), regroupés dans le Tableau 3-2. Les Figure 3-21 et Figure 3-22 illustrent les gradients de densité, les cartes de tailles prescrites et réelles, ainsi que l'erreur absolue (en %) entre ces deux cartes lors de la SIMP adaptative du modèle *cas test*.

Tableau 3-2 : Synthèse des paramètres de l'adaptation.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	400mm
χ	Paramètre de raffinement	1,75
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2
n	Nombre de couches du filtrage	1

Figure 3-21 : 1^{re} adaptation : (a) gradient de densité, tailles (b) prescrites, (c) réelles et (d) erreur dans le respect de la taille prescrite.

Le gradient de densité de la Figure 3-21a est obtenu à partir de la 1^{re} SIMP (maillage uniforme) et celui de la Figure 3-22a à partir de la 2^e SIMP (après la 1^{re} adaptation). On constate que la valeur maximale du gradient a presque doublé. Les zones de gradient nul ont une taille prescrite de $E_{nm} = 400\text{mm}$ tandis que les frontières structurales sont raffinées. Les tailles prescrites sont de $138\text{mm} - 400\text{mm}$ et de $55\text{mm} - 400\text{mm}$, rapport $\min/\max \cong 1/7$ (Figure 3-21b et Figure 3-22b), alors que les tailles $\min\text{-max}$ réelles sont de $104\text{mm} - 653\text{mm}$ et de $71\text{mm} - 619\text{mm}$, rapport $\min/\max \cong 1/9$

(Figure 3-21c et Figure 3-22c) respectivement pour les 1^{re} et 2^e adaptations. Cet état de fait découle de petites déviations inévitables dans le respect des tailles prescrites lors de la génération automatique du maillage. Par contre, comme le montre l'erreur absolue entre les deux cartes de taille pour les 1^{re} et 2^e adaptations (Figure 3-21d et Figure 3-22d), les cartes de tailles prescrites sont globalement respectées (voir Tableau 3-3), malgré quelques différences locales plus prononcées pour la 2^e adaptation.

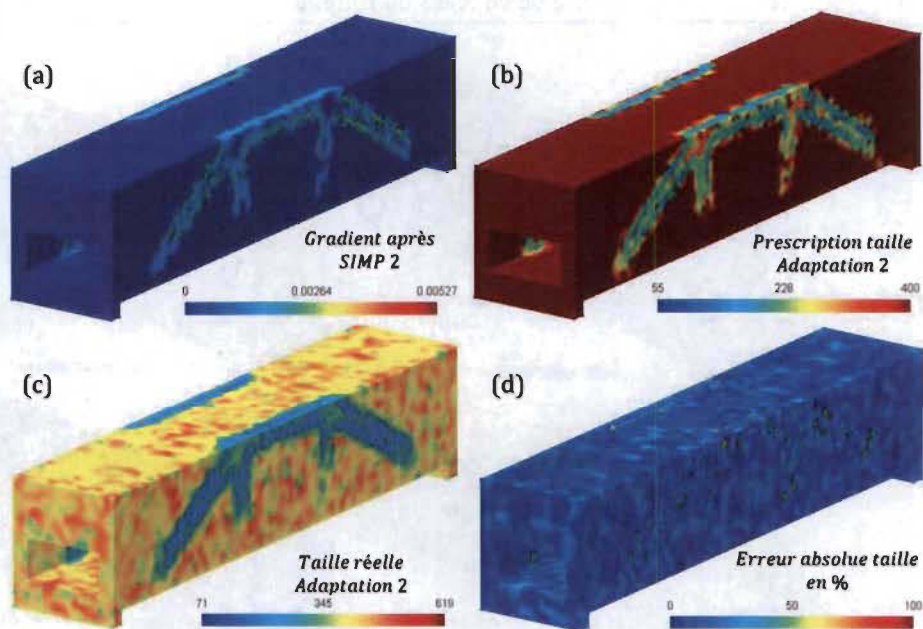


Figure 3-22 : 2^e adaptation : (a) gradient de densité, tailles (b) prescrites, (c) réelles et (d) erreur dans le respect de la taille prescrite.

Le Tableau 3-3 donne les caractéristiques des maillages avant chaque optimisation. On constate que la 1^{re} adaptation provoque une diminution nette du nombre initial de tétraèdres. Ce nombre augmente légèrement à la 2^e adaptation par densification de l'interface matière-vide. Ce tableau donne aussi la qualité des éléments telle que [74] :

$$Q_e = \alpha \cdot \frac{r_{ms}}{l_{\max}} \quad (3-19)$$

Où l_{max} est la longueur du plus long segment de l'élément et r_{ins} le rayon de la sphère inscrite dans l'élément. $\alpha = 2 \cdot \sqrt{6}$, et permet d'avoir $Q_e = 1$ pour un élément équilatéral et $Q_e = 0$ pour les éléments dégénérés.

Tableau 3-3 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-23.

	Nombre de tétraèdres			Qualité des éléments (%)			
	Prescrit	Réel	Erreur resp. carte (%)	$Q_e \leq 0,1$	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	$Q_e > 0,5$
Uniforme	246 073	213 512	13	0,00	0,02	16,08	83,90
Adaptation1	81 736	76 766	6	0,01	0,13	27,55	72,31
Adaptation2	92 966	85 411	8	0,01	0,11	28,48	71,40

La Figure 3-23 expose les répartitions finales de la densité après optimisation et les maillages utilisés lors de la SIMP adaptative du modèle *cas test* (voir paramètres dans le Tableau 3-2). La similarité des formes optimisées est remarquable. Une meilleure élaboration du résultat, aussi bien sur le plan de la compliance finale, de la forme optimisée que de la qualité des frontières structurales, s'observe au fil des adaptations. De manière quantitative, la compliance finale passe de 557 J à 452 J, soit une amélioration d'environ 20 %. Il en est de même pour le temps d'optimisation qui, malgré la diminution du critère de convergence de la méthode SIMP et l'augmentation du nombre d'itérations, diminue. On passe d'environ 1 itération/60 secondes sur le maillage uniforme, à pratiquement 1 itération/15 secondes sur les maillages adaptés et ceci, sans altération de la qualité du résultat. Ces informations sont consignées dans le Tableau 3-4.

Tableau 3-4 : Synthèse des résultats lors de l'implémentation de la SIMP adaptative.

	Nombre d'itérations	Temps d'optimisation	Convergence de la SIMP (%)	Compliance finale (Joules)
Uniforme	19	18 min	1 000	557
Adaptation1	21	5 min	0,200	477
Adaptation2	42	10 min	0,040	452
Total	82	33 min		

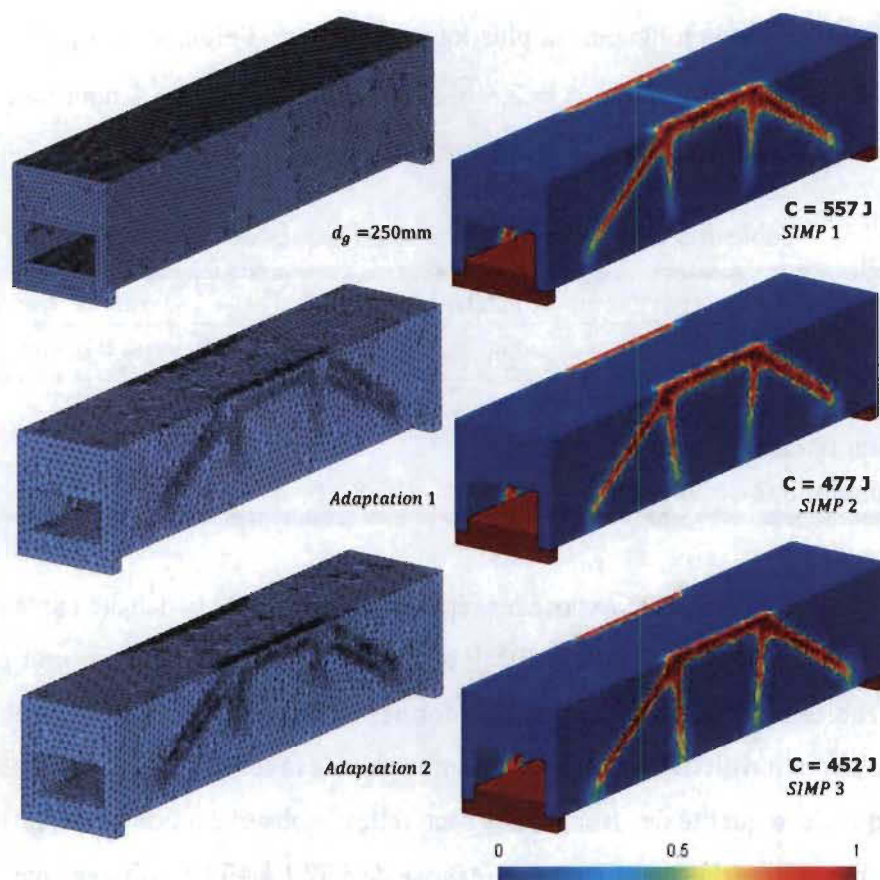


Figure 3-23 : Résultats de la méthode SIMP adaptative du modèle *cas test* avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-2.

Afin d'étudier les effets de certains paramètres du principe d'adaptation, ces derniers ont été modifiés et l'impact de ces modifications observé. Il s'agit des paramètres de raffinement χ , de déraffinement E_{nm} et du nombre de couches de voisins n utilisé lors du filtrage de la densité (voir équation 3-15). Pour la plupart des cas les mêmes paramètres que ceux du Tableau 3-2 ont été utilisés. En vue d'une comparaison, les résultats précédents (avec les paramètres du Tableau 3-2) sont considérés comme cas de référence (*Ref.*). Dans les autres cas, sauf spécification contraire, le filtrage est par couches d'éléments, avec des critères de convergence de 1 %, 0,2 % et 0,04 % lors des 1^{res}, 2^{es} et 3^{es} SIMP.

3.4.7.1 Effet du paramètre de raffinement χ

Pour analyser les effets du paramètre de raffinement sur le résultat optimisé, les mêmes paramètres que ceux du Tableau 3-2 ont été employés, en changeant uniquement le paramètre χ qui est diminué de 1,75 à 1,25. Les paramètres de ce cas sont regroupés dans le Tableau 3-5 suivant.

Tableau 3-5 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec diminution du paramètre de raffinement.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	400mm
χ	Paramètre de raffinement	1,25
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

La Figure 3-24 présente les répartitions finales de la densité obtenue, ainsi que les maillages utilisés pour chaque optimisation par la méthode SIMP. Le nombre d'itérations à la convergence est de 19, 28 et 34 respectivement pour les 1^{re}, 2^e et 3^e SIMP. Le Tableau 3-6 contient les données du maillage initial, de la 1^{re} et de la 2^e adaptation. On remarque une diminution du nombre d'éléments entre la 2^e et la 3^e adaptation, ce qui traduit un grossissement des éléments du maillage notamment dans des zones précédemment densifiées. Ainsi, il se peut qu'une faible valeur de χ résulte en des prescriptions de tailles pour la plupart supérieures à la taille uniforme initiale, occasionnant par le fait même un déraffinement du maillage (voir Figure 3-16). La comparaison avec les résultats du Tableau 3-3 permet d'étayer ce fait, en remarquant que lors de la 3^e adaptation, seulement 65 000 éléments ont été créés dans le présent cas ($\chi = 1,25$), comparativement à environ 85 000 éléments dans le cas de référence ($\chi = 1,75$). Les tailles *min-max* réelles obtenues sont de 109mm – 632mm et de 81mm – 630mm (rapport *min/max* $\cong 1/8$), respectivement après les 1^{re} et 2^e adaptations.

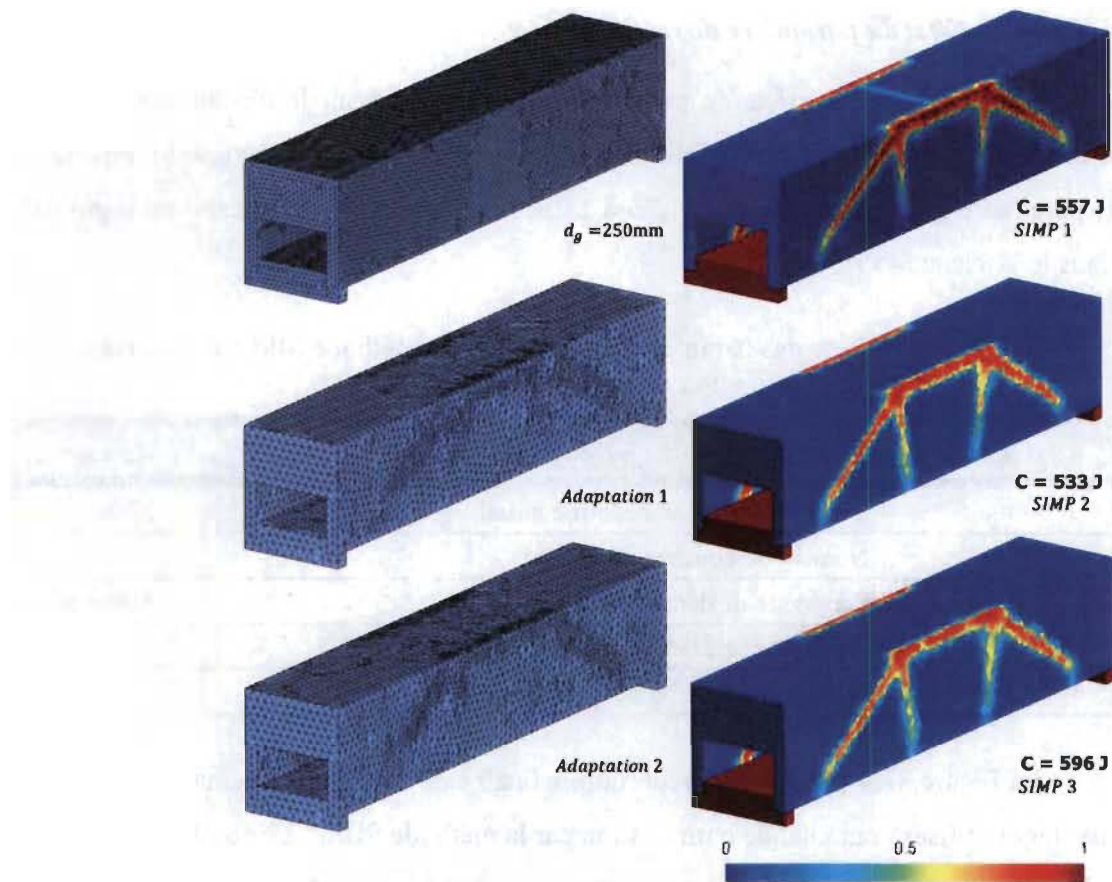


Figure 3-24 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-5.

Tableau 3-6 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-24.

	Nombre de tétraèdres			Qualité des éléments (%)			
	Prescrit	Réel	Erreur resp. carte (%)	$Q_e \leq 0,1$	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	$Q_e > 0,5$
Uniforme	246 073	213 512	13	0,00	0,02	16,08	83,90
Adaptation1	70 625	67 612	4	0,03	0,13	26,55	73,29
Adaptation2	68 390	65 929	4	0,01	0,16	26,75	73,08

Le paramètre χ a ensuite été augmenté, passant de 1,75 à 2, en gardant le reste des paramètres intacts, comme le renseigne le Tableau 3-7. Le résultat de la méthode SIMP adaptative est présenté sur la Figure 3-25 et celui des maillages dans le Tableau 3-8.

Tableau 3-7 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec augmentation du paramètre de raffinement.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	400mm
χ	Paramètre de raffinement	2
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

Pour $\chi = 2$, la même tendance que dans le cas de référence ($\chi = 1,75$) est observée, avec cependant la grande différence que le nombre d'éléments après chaque adaptation est plus élevé. La compliance à la fin de l'optimisation diminue au fil des adaptations et la frontière structurelle est de mieux en mieux définie. Initialement de 557 J, la compliance finale après optimisation adaptative est de 397 J (comparativement à 452 J lorsque $\chi = 1,75$). Le nombre d'itérations à la convergence est de 19, 24 et 51 respectivement pour les 1^{re}, 2^e et 3^e SIMP. Cette fois, les tailles *min-max* réelles obtenues sont de 86mm – 658mm et de 24mm – 631mm (rapport *min/max* $\cong 1/26$), respectivement lors des 1^{re} et 2^e adaptations, comparé à 1/9 lorsque $\chi = 1,75$.

Tableau 3-8 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-25.

	Nombre de tétraèdres			Qualité des éléments (%)			
	Prescrit	Réel	Erreur resp. carte (%)	$Q_e \leq 0,1$	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	$Q_e > 0,5$
Uniforme	246 073	213 512	13	0,00	0,02	16,08	83,90
Adaptation1	89 106	83 105	7	0,02	0,17	27,72	72,09
Adaptation2	131 617	117 347	11	0,02	0,12	31,14	68,72

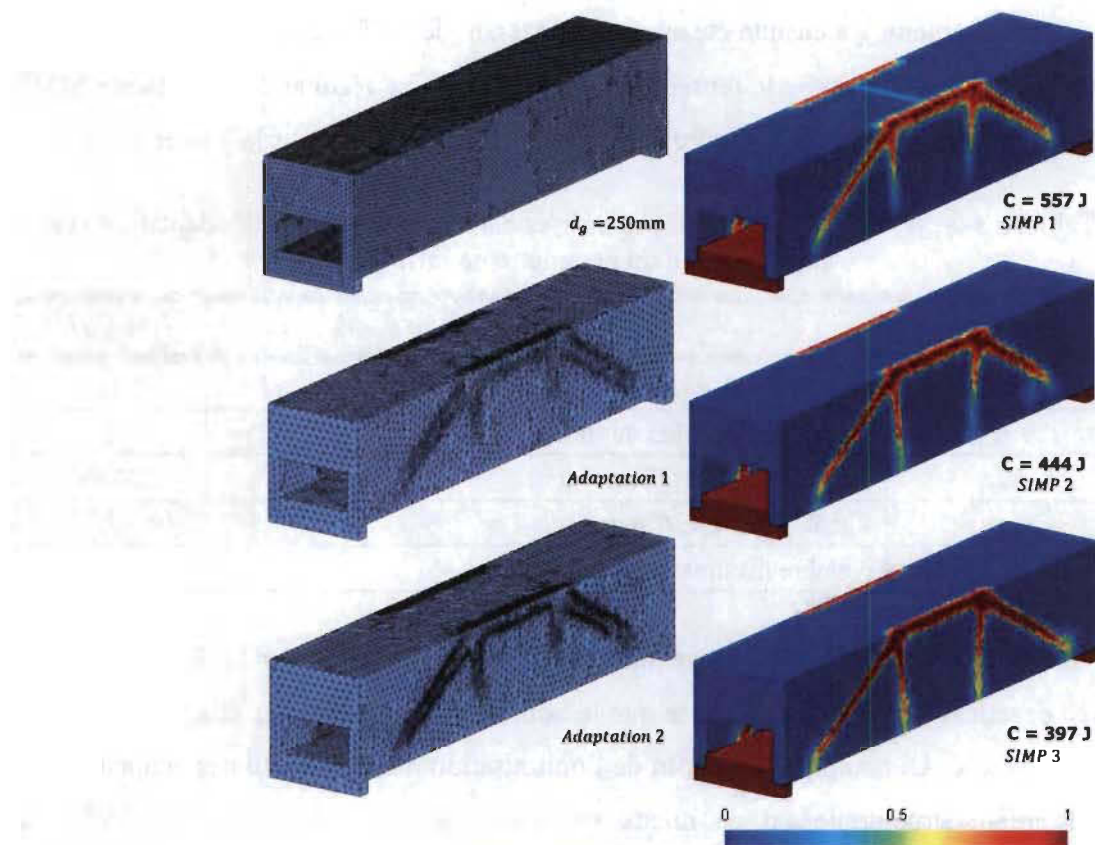


Figure 3-25 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation sont résumés dans le Tableau 3-7.

3.4.7.2 Effet du paramètre de déraffinement E_{nm}

De manière analogue au paramètre de raffinement χ , dans cette partie, l'on a fait varier le paramètre de déraffinement E_{nm} . Il a tout d'abord été diminué de $400mm$ à $300mm$, comme le montre le Tableau 3-9.

La Figure 3-26 illustre les distributions optimales de densité résultant du processus d'optimisation et le Tableau 3-10 contient les résultats sur les maillages utilisés pour chacune des 3 optimisations. Les 1^{re}, 2^e et 3^e SIMP ont convergé respectivement après 19, 21 et 23 itérations. Les valeurs finales de la compliance sont meilleures que celles du cas de référence. Une fois de plus, la compliance à la fin de l'optimisation décroît au fil des adaptations. Les tailles *min-max* réelles sont de $61mm - 472mm$ et de $7mm - 495mm$

(rapport $min/max \cong 1/70$), respectivement après les 1^{re} et 2^e adaptations. La compliance finale après optimisation passe de 557 J à 406 J (comparativement à 452 J lorsque $\chi = 1,75$).

Tableau 3-9 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec augmentation du paramètre de déraffinement E_{nm} .

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	300mm
χ	Paramètre de raffinement	1,75
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

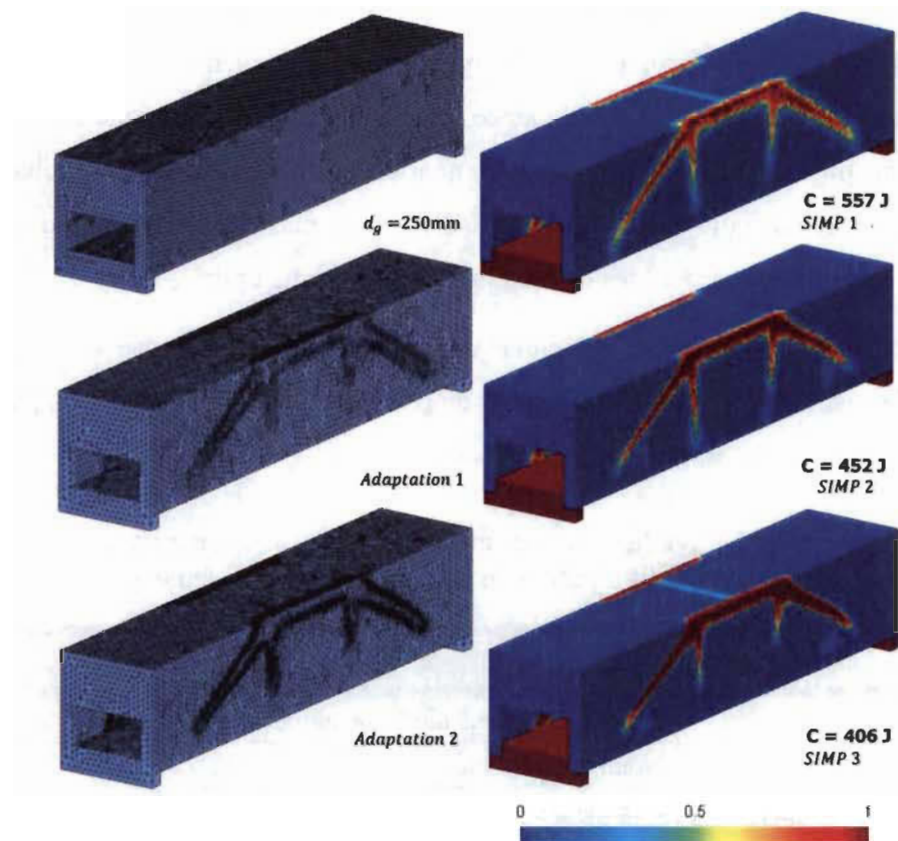


Figure 3-26 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-9.

Tableau 3-10 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-26.

	Nombre de tétraèdres			Qualité des éléments (%)			
	Prescrit	Réel	Erreur resp. carte (%)	$Q_e \leq 0,1$	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	$Q_e > 0,5$
Uniforme	246 073	213 512	13	0,00	0,02	16,08	83,90
Adaptation1	190 808	174 986	8	0,00	0,04	24,96	75,00
Adaptation2	319 841	269 297	16	0,00	0,07	29,00	70,93

Ce cas a ceci de particulier que le nombre d'éléments créés après adaptation (270000 éléments) est supérieur au nombre d'éléments du maillage uniforme initial (214000 éléments), comme le donne le Tableau 3-10. L'on constate également sur la Figure 3-26 que la barre transversale légèrement apparente sur le résultat de la 1^{re} SIMP, est plus manifeste après la 3^e SIMP. En effet, il est bien connu qu'un maillage fin et une faible fraction volumique favorisent l'apparition des éléments structuraux dans le résultat optimisé [7, 131]. En conséquence, pour une fraction volumique faible comme dans ce cas, plus le maillage est fin notamment du fait d'un raffinement global (diminution de E_{nm}) et adaptatif (par la fonction d'adaptation), plus des éléments structuraux comme des poutres sont susceptibles d'apparaître dans la forme optimisée.

Le Tableau 3-11 renseigne sur les paramètres de l'adaptation appliqués dans le dernier cas où, cette fois, la valeur du paramètre de déraffinement E_{nm} a été augmentée, passant de 400mm à 500mm.

Tableau 3-11 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec diminution du paramètre de déraffinement E_{nm} .

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	500mm
χ	Paramètre de raffinement	1,75
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

Les distributions de densité résultant de l'optimisation adaptative et les maillages utilisés à cet effet sont présentés sur la Figure 3-27. La méthode SIMP a convergé après 19, 29 et 28 itérations respectivement après les 1^{re}, 2^e et 3^e optimisations. Les tailles *min-max* réelles sont de 110mm – 756mm et de 136mm – 751mm (rapport *min/max* \cong 1/6), respectivement après les 1^{re} et 2^e adaptations. On dirait que le maillage est principalement déraffiné de la 1^{re} à la 2^e adaptation, comme l'indique le nombre d'éléments dans le Tableau 3-12. Pareille diminution du nombre d'éléments à travers les adaptations avait déjà été observée lorsque χ décroît (voir Tableau 3-6). Il s'ensuit une dégradation du résultat optimisé : la frontière structurelle devient imprécise et la compliance augmente (de 557 J à 692 J). Le Tableau 3-12 contient les résultats sur les maillages employés pour chacune des 3 optimisations.

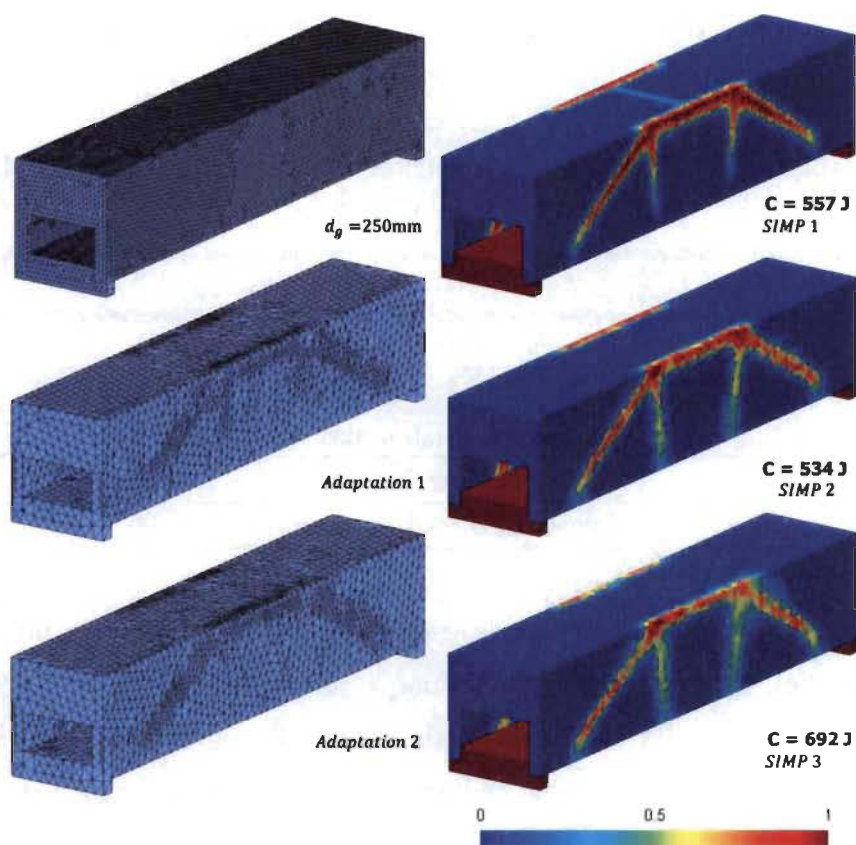


Figure 3-27 : Optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative avec les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-11.

Tableau 3-12 : Synthèse des caractéristiques des maillages de la Figure 3-27.

	Nombre de tétraèdres			Qualité des éléments (%)			
	Prescrit	Réel	Erreur resp. carte (%)	$Q_e \leq 0,1$	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	$Q_e > 0,5$
Uniforme	246 073	213 512	13	0,00	0,02	16,08	83,90
Adaptation1	41 220	47 477	15	0,03	0,21	33,15	66,61
Adaptation2	37 850	44 768	18	0,01	0,20	32,64	67,14

3.4.7.3 Effet du nombre de couches

Dans cette partie, l'effet de l'augmentation du nombre de couches de filtrage sur le résultat optimisé est analysé. C'est ainsi que les mêmes paramètres que ceux du Tableau 3-2 ont été employés, en modifiant uniquement le nombre de couches qui est passé d'une couche à 2 couches de voisins. Les paramètres sont présentés dans le Tableau 3-13.

Tableau 3-13 : Synthèse des paramètres utilisés dans la méthode SIMP adaptative avec filtrage à 2 couches.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille du maillage uniforme initial	250mm
n	Nombre de couches du filtrage	2
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	400mm
χ	Paramètre de raffinement	1,75
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

La Figure 3-28 présente le résultat de la SIMP adaptative en utilisant un filtrage à 2 couches. Le processus d'optimisation a convergé après 15, 17 et 24 itérations après respectivement les 1^{re}, 2^e et 3^e optimisations. On observe qu'un côté entier du modèle n'existe plus dans le résultat optimisé dès la 1^{re} adaptation, ce qui rend la solution finale non fonctionnelle. La partie pleine de matière est presque inexistante, car confondue avec la frontière structurale qui est très étalée. La compliance initiale est de 1073 J, ce qui est

bien loin des 557 J obtenus précédemment en utilisant une seule couche de voisins lors du filtrage et ce, pour les mêmes valeurs de E_{nm} et χ .

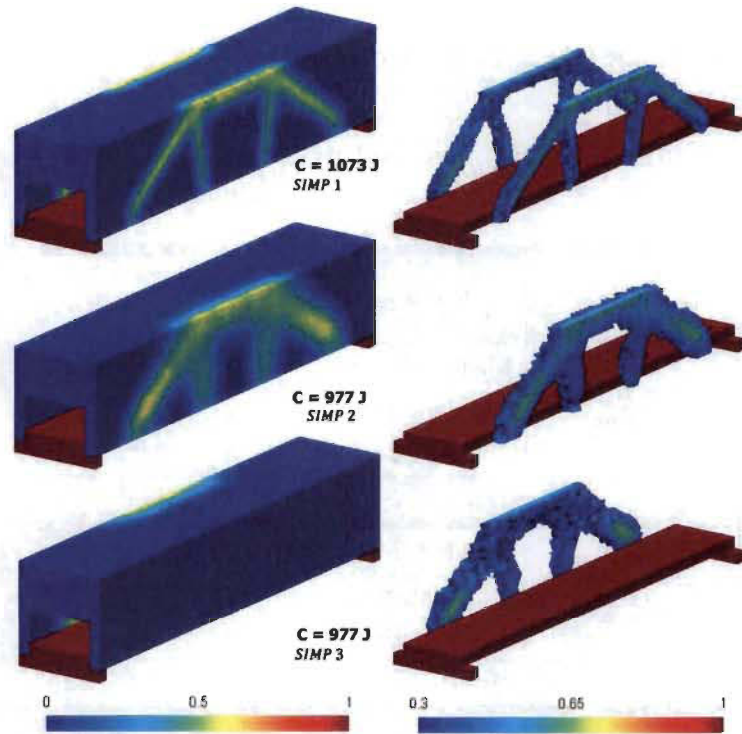


Figure 3-28 : Optimisation topologique par la méthode SIMP avec filtrage à 2 couches et les paramètres d'adaptation résumés dans le Tableau 3-13.

3.5 Récapitulatif des résultats

La méthode SIMP adaptative développée vient d'être présentée en s'aidant d'un modèle *cas test*. Le Tableau 3-14 contient un récapitulatif des résultats obtenus. Il regroupe entre autres les valeurs des paramètres qui ont varié, les rapports de tailles réelles, les nombres d'itérations avant convergence de l'optimisation, ainsi que les compliances au fil des adaptations du maillage. Les résultats actuels sont similaires à ceux de [81, 82]. Par contre, comparée à ces derniers et à [75, 79] qui utilisent des éléments finis non conventionnels à l'interface matière-vide pour le raffinement, à [77-79] qui spécifient un rayon pour déterminer la zone à raffiner et à [40, 75, 76, 80, 83] qui raffinent non seulement la frontière structurelle mais également la partie remplie de matière,

l'approche proposée utilise des éléments finis conventionnels, détermine automatiquement la zone à raffiner et raffine uniquement la zone ciblée. De plus, nombre de ces études sont illustrées à l'aide d'exemples en 2D et n'intègrent pas un déraffinement des parties solide (pleine de matière) et vide.

Tableau 3-14 : Récapitulatif des résultats de la méthode SIMP adaptative appliquée avec $d_g = 250mm$.

Cas	Paramètres	Maillages	Nombre d'itérations	Min/Max tailles réelles	Compliance finale (Joules)
<i>Réf.</i>	$E_{nm} = 400mm$ $\chi = 1,75$	Maillage initial	19		557
		1 ^{re} adaptation	21	1/6	477
		2 ^e adaptation	42	1/9	452
		Total	82		
(I)	$E_{nm} = 400mm$ $\chi = 1,25$	Maillage initial	19		557
		1 ^{re} adaptation	28	1/6	533
		2 ^e adaptation	34	1/8	596
		Total	81		
(II)	$E_{nm} = 400mm$ $\chi = 2,00$	Maillage initial	19		557
		1 ^{re} adaptation	24	1/8	444
		2 ^e adaptation	51	1/26	397
		Total	94		
(III)	$E_{nm} = 300mm$ $\chi = 1,75$	Maillage initial	19		557
		1 ^{re} adaptation	21	1/8	452
		2 ^e adaptation	23	1/70	406
		Total	63		
(IV)	$E_{nm} = 500mm$ $\chi = 1,75$	Maillage initial	19		557
		1 ^{re} adaptation	29	1/6	534
		2 ^e adaptation	28	1/6	692
		Total	76		

En observant ce tableau, l'on s'aperçoit que les rapports de tailles les plus élevés s'obtiennent lorsqu'on augmente χ (cas II) ou qu'on diminue E_{nm} (cas III). Ces derniers cas sont ceux qui ont les nombres les plus élevés d'éléments, ainsi que les rapports de tailles et les compliances les plus bas (397 J et 406 J). Ces faibles rapports de tailles comparés au cas *Ref.* illustrent une faiblesse de la méthodologie développée dans son état actuel, à savoir l'absence de limitation du gradient de taille des éléments. Il est également à noter que pour des valeurs de compliances semblables, deux fois plus d'éléments (environ 270000 tétraèdres, comparés à 118000 tétraèdres après la 2^e adaptation) ont été utilisés pour mailler le modèle dans (cas III) par rapport à (cas II). Finalement toujours dans la même lancée, l'on remarquera que les nombres d'itérations sont semblables pour lors des 1^{re} et 2^e SIMP, mais qu'ils doublent (51 itérations comparées à 23 itérations) à la 3^e SIMP pour (cas II) par rapport à (cas III). Cet état de fait se justifierait par le fait qu'il paraît plus facile et rapide de répartir de la matière dans des éléments d'un maillage globalement raffiné (cas III) que dans un autre plus grossier et seulement très localement raffiné (cas II). Par ailleurs, notons que hormis les 2 cas sus-cités, le rapport de tailles des autres exemples, en l'occurrence les cas *Ref.*, I et IV, est proche de celui retrouvé par certains auteurs qui gravite autour de 1/6 [81].

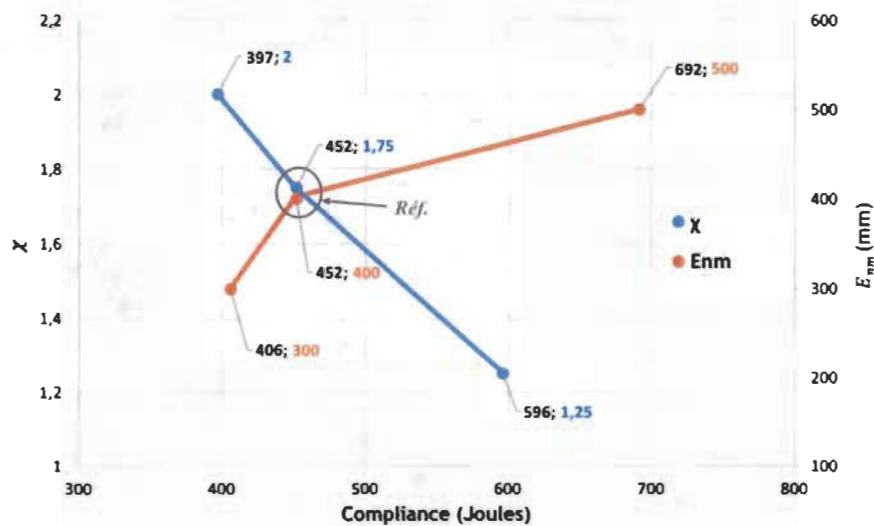


Figure 3-29 : Évolution de la compliance à la fin de la méthode SIMP adaptative en fonction de E_{nm} (pour $\chi = 1,75$) et χ (pour $E_{nm} = 400\text{mm}$).

La Figure 3-29 illustre les résultats du Tableau 3-14, particulièrement l'évolution de la compliance à la fin de l'optimisation par la méthode SIMP adaptative en fonction des paramètres d'adaptation E_{nm} et χ . Il en ressort que diminuer E_{nm} (cas III) ou augmenter χ (cas II) semble produire des tendances similaires, soit une baisse de la compliance. Dans le cas contraire quand E_{nm} croît ou χ décroît l'inverse est observé, soit une dissipation de la frontière structurale et une compliance qui augmente. Aussi, une différence de tailles des éléments peut être observée sur les répartitions de la densité de matière à la fin du processus d'optimisation par la méthode SIMP adaptative pour les trois cas *Ref.*, II (augmenter χ) et III (diminuer E_{nm}) illustrées sur la Figure 3-30 pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction. On remarque par exemple que lorsque cette densité seuil est supérieure à 0,75, il y a une perte de continuité dans la solution uniquement pour le cas *Ref.*

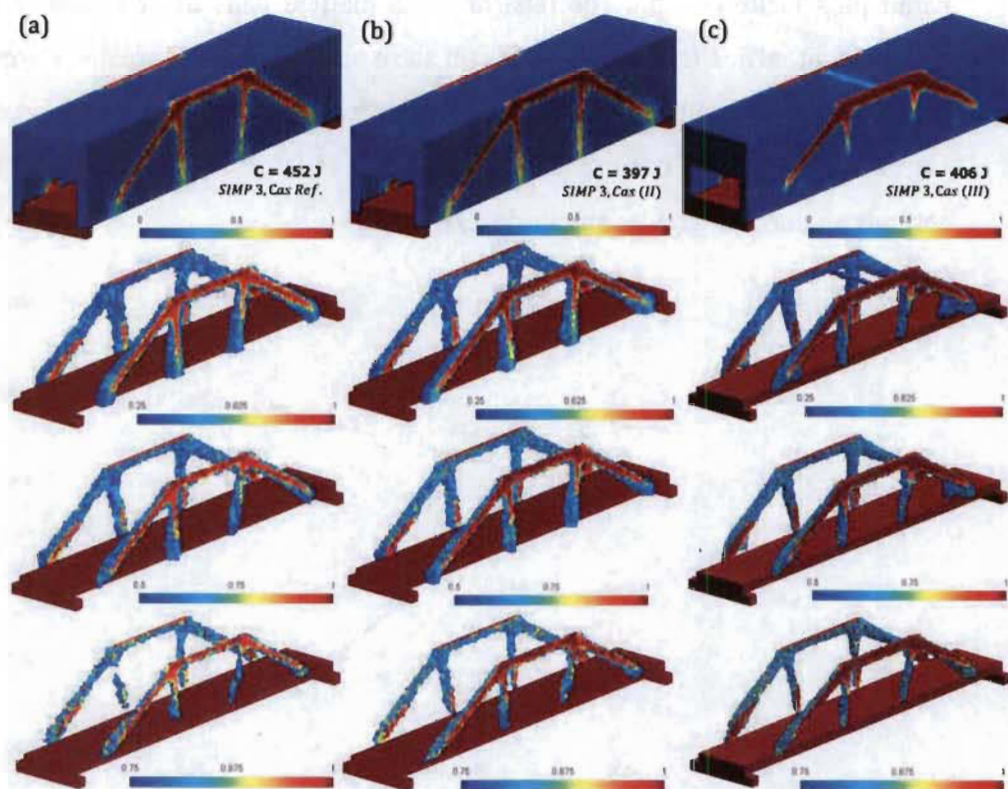


Figure 3-30 : Illustration des répartitions de la densité à la fin de la méthode SIMP adaptative pour les cas (a) *Ref.*, (b) II, et (c) III).

3.6 Conclusion

En somme, après avoir exposé les concepts inhérents à la méthode SIMP, ce chapitre a présenté la méthode SIMP adaptative, qui est la méthode SIMP avec adaptation du maillage. La méthode SIMP adaptative proposée couple le calcul du gradient de la densité de matière pour localiser les zones d'intérêt à raffiner ou déraffiner, avec une fonction d'adaptation qui modifie adaptativement la résolution spatiale du maillage. L'adaptation consiste en un raffinement et un déraffinement adaptatifs et simultanés du maillage après chaque optimisation par la méthode SIMP. En procédant de la sorte, il en résulte une amélioration de la description de l'interface matière-vide et de la qualité visuelle de la solution optimisée, ainsi qu'une diminution de la compliance globale (voir illustration Figure 3-31). De fait, un gain d'environ 20% entre les compliances avant et après adaptation a été obtenu en appliquant l'approche proposée sur un exemple illustratif de modèle de pont.

Malgré ces résultats probants, deux limites principales, que sont le critère de convergence de l'adaptation et le non-contrôle du gradient de la taille des mailles, sont à relever. À celles-ci s'ajoute le critère de choix des paramètres d'adaptation (E_{nm}, χ) qui, dans l'état actuel de la méthode, est empirique. L'adaptation du résultat de l'optimisation effectuée dans ce chapitre permet de créer des éléments fins uniquement à l'interface solide-vide qui est le siège des densités intermédiaires. En concentrant l'effort de résolution dans cette zone, elle permet de mieux définir la frontière structurelle de la forme optimisée. La modification localisée du maillage à travers l'adaptation revêt différents intérêts. Tout d'abord du point de vue de l'optimisation, elle permet de répartir adéquatement la densité de matière dans la zone ciblée ce qui, en retour, permet d'obtenir une meilleure valeur (autrement dit plus petite) de la fonction objectif et donc une structure adaptée plus rigide (compliance plus faible) que celle de la structure optimisée non adaptée. Cet état de fait montre que l'adaptation permettrait de rapprocher la valeur de la solution optimisée de la solution numérique par analyse par éléments finis 3D du modèle optimisé. Ensuite du point de vue de l'interprétation du résultat de l'optimisation,

augmenter la densité nodale uniquement à la frontière structurelle faciliterait l'application des techniques de transformation de maillages bien connues telles que le lissage et l'extraction du squelette sur lesquels nous reviendrons un peu plus loin dans cette thèse. En effet, la solution de l'optimisation n'étant pas connue à priori, le recouvrement de tout détail et information pertinente à travers de telles méthodes pourrait aider, ou tout du moins orienter de manière plus précise, la construction du modèle CAO découlant de l'optimisation. La transformation du modèle optimisé adapté en modèle CAO composé de poutres droites fait l'objet du chapitre suivant.

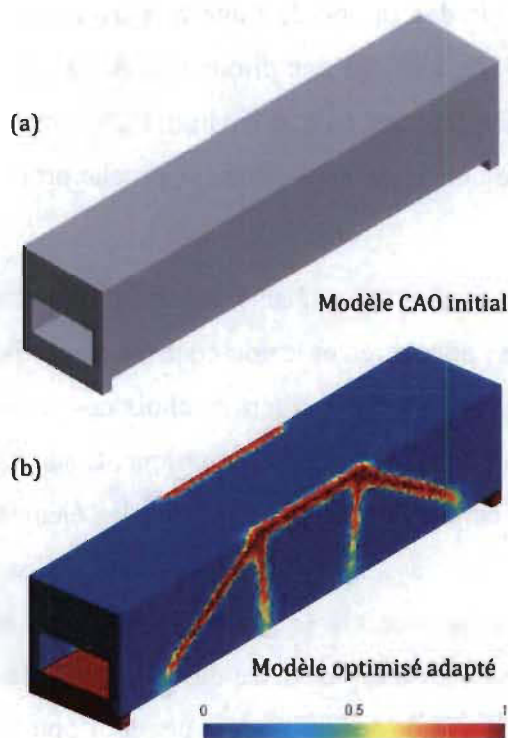


Figure 3-31 : Illustration (a) du modèle CAO initial et (b) du résultat de la méthode SIMP adaptative développée du cas *Ref.*

CHAPITRE 4 TRANSFORMATION EN UNE STRUCTURE DE POUTRES DROITES

4.1 Introduction

Durant l'optimisation topologique par la méthode SIMP, rechercher le sous-domaine structural optimal occupé par la matière sans aucune restriction sur la topologie et avec unique contrainte un volume fixé permet une grande liberté de conception. Elle permet généralement d'obtenir deux catégories de silhouettes : celles s'orientant vers des structures composées de poutres (Figure 4-1a) et celles s'orientant vers des structures volumiques (Figure 4-1b).

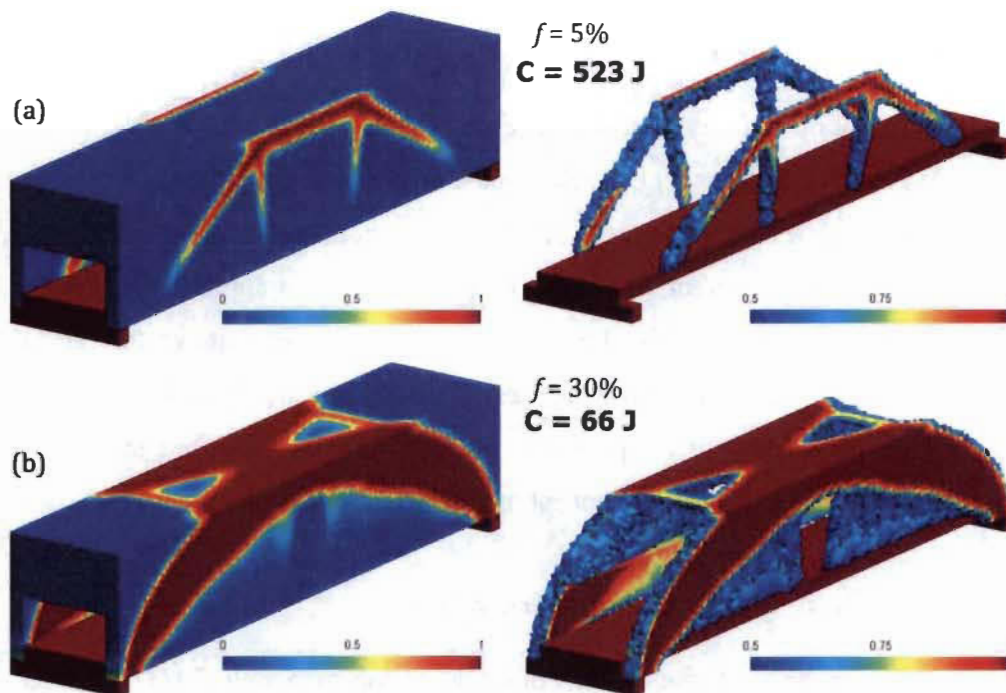


Figure 4-1 : Illustration d'un résultat d'optimisation tendant vers des structures (a) composées de poutres et (b) volumiques.

La 1^{re} catégorie est favorisée par de faibles fractions volumiques (notamment $f < 10\%$) et un maillage fin et la 2^e par des fractions volumiques élevées [4, 5, 7, 131]. L'adaptation du résultat de l'optimisation effectuée dans le chapitre précédent a permis de créer des éléments fins uniquement à l'interface solide-vide et de ce fait, permet de mieux définir la frontière structurelle de la forme optimisée. Toutefois, bien que le résultat de l'optimisation ait été affiné à bien des égards à travers la méthode SIMP adaptative, la forme optimisée adaptée ne peut être utilisée telle qu'elle dans les étapes subséquentes de la conception sans modifications substantielles comme nous allons le voir dans le présent chapitre à la fin duquel, partant d'une forme optimisée adaptée qui s'oriente vers une structure composée de poutres, nous aboutirons à un modèle CAO composé de poutres droites.

4.2 Hypothèses

En plus des hypothèses mentionnées à la section 3.2, cette recherche considère que le résultat d'optimisation topologique s'oriente vers des structures de poutres, ce qui veut dire que les autres types de solutions, notamment volumiques, coques, ou des combinaisons sortent du cadre d'application de l'approche proposée. Le matériau considéré est un matériau homogène (tous les éléments qui constituent le matériau sont identiques) et son comportement est élastique linéaire. Pour finir, les sections planes et perpendiculaires restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne avant et après déformation et le cisaillement est négligé (poutres d'Euler).

4.3 Principe de la transformation

Il comprend essentiellement la conversion en modèle CAO du résultat de la méthode SIMP adaptative et la validation du modèle converti, comme le montre la Figure 4-2 qui est une suite de la Figure 3-13.

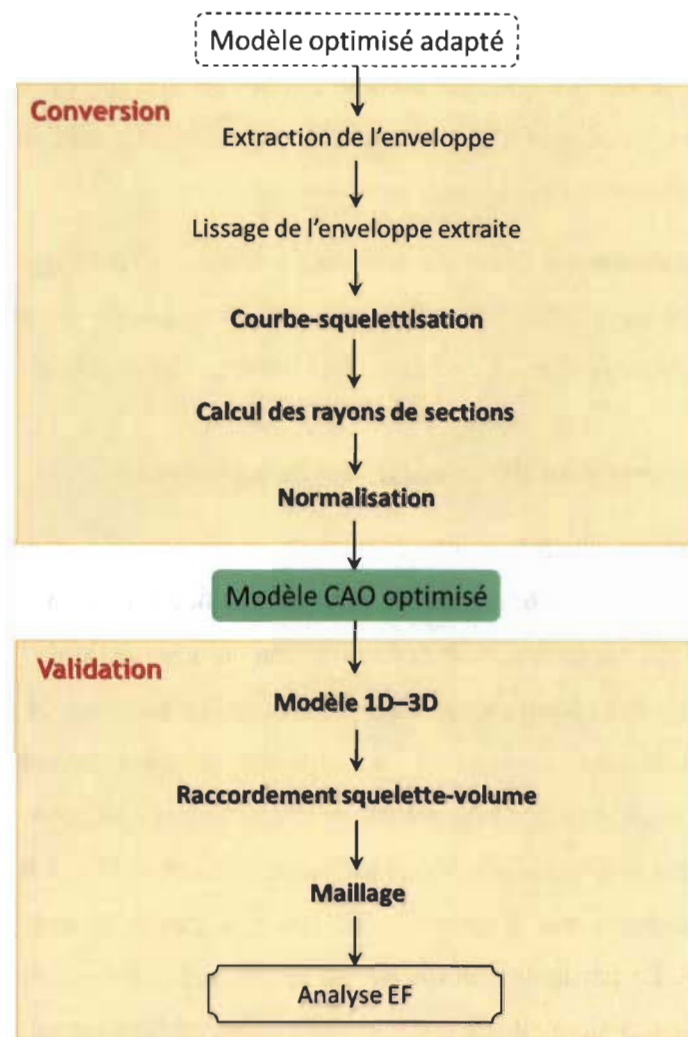


Figure 4-2 : Principe de la transformation en une structure de poutres.

La méthodologie développée commence par l'extraction puis le lissage de l'enveloppe de la forme optimisée adaptée. Cette dernière est extraite sous forme de triangulation. Le lissage (voir sous-section 2.8.2) constitue l'étape préalable à la squelettisation. La squelettisation (voir sous-section 2.8.3) est l'extraction du squelette de la forme. Le squelette est extrait dans cette étude sous forme de courbes constituées d'un ensemble de segments formant des branches. Il s'ensuit une transformation de chaque branche en une poutre droite dont le rayon de section est calculé. À ce stade, la conversion en modèle CAO est achevée. Ce dernier est alors mixte, constitué à la fois de poutres

(résultat de la conversion de la partie optimisée) et d'une partie volumique (provenant de la partie de *non-design*). Le modèle EF qui en découle est également mixte, constitué d'éléments poutres et d'éléments tétraédriques. Les poutres sont raccordées au volume à l'aide d'éléments finis appelés *mini-poutres*.

Pratiquement, le cas de référence précédent (voir Figure 3-23), qui est le résultat de la méthode SIMP adaptative appliquée sur un modèle de passerelle utilisé comme cas test, est employé dans ce chapitre pour illustrer l'approche de transformation proposée.

4.4 Conversion du modèle optimisé adapté

Comme illustré en introduction de ce chapitre, les modèles optimisés s'orientant vers des structures composées de poutres sont obtenus en utilisant, lors de l'optimisation topologique, un maillage fin et une fraction volumique faible [7, 131]. De fait, la fraction volumique étant faible, le maillage fin facilite la répartition de la matière dans les mailles. Cette combinaison favoriserait l'apparition de détails structuraux dans la forme optimisée et donc, oriente de cette dernière vers une structure composée de poutres. La conversion de la forme optimisée adaptée prend place uniquement dans la partie de *design*. En effet, durant le processus d'optimisation, seule la partie de *design* a été affectée et donc modifiée. La partie de *non-design* est restée inchangée, surtout parce qu'elle représente une partie fonctionnelle de connexion ou d'assemblage avec d'autres pièces. Le processus de conversion commence par l'extraction de la forme à convertir.

4.4.1 Extraction de l'enveloppe de la forme optimisée adaptée

La forme optimisée résultant de la méthode SIMP adaptative est récupérée, comme mentionné à la sous-section 3.3.7, en ne conservant que des tétraèdres dont la densité est supérieure ou égale à une densité d'extraction ρ_{seuil} , les autres tétraèdres étant désactivés. L'enveloppe de la forme optimisée est créée à partir de tout triangle qui n'appartient qu'à un seul tétraèdre optimisé ; on conserve les coordonnées de ses nœuds pour le recréer dans le maillage de surface [11]. Effectivement, l'on considère qu'un triangle qui appartient à

deux tétraèdres est un triangle interne (dans le volume du modèle optimisé) et que celui qui appartient à un seul tétraèdre fait partie de l'enveloppe du modèle optimisé. Sur la triangulation résultante, un soin est pris pour orienter les normales vers l'extérieur de la matière en fonction des tétraèdres. Comme on le verra ci-dessous, ce principe sera utilisé afin d'identifier les voisins de chaque élément lors du traitement de certains artéfacts. De fait, l'utilisation du seuillage et la purge des éléments de densité inférieure au seuil peut provoquer des pertes de continuité dans les membres de la structure, l'apparition des éléments isolés, des éléments manquants sur les arêtes vives et face planes (existantes dans le modèle optimisé), ainsi que des cas dits de *non manifold* [11, 12]. Ceci nécessite des traitements spécifiques à chacun des phénomènes comme détaillés par [11].

En effet, le fait de filtrer la densité relative est à l'origine de l'influence considérable de la valeur de la densité seuil sur la forme optimisée. Des valeurs du seuil trop élevées occasionneraient une perte de continuité dans les membres de la structure du modèle optimisé. Ce manque de continuité peut provoquer des difficultés additionnelles de fabrication, de conversion, en plus d'influencer sa compliance. Plus encore, certains auteurs s'accordent sur le fait que la continuité de la matière dans le modèle optimisé, bien plus que le fait de retrouver le volume initialement prescrit, a davantage d'importance dans l'extraction de la forme optimisée [27]. Ces derniers, de même que les travaux effectués au sein de notre équipe de recherche recommandent d'utiliser de faibles valeurs de la densité seuil d'extraction afin de remédier à ce problème [12].

Les éléments isolés quant à eux sont supprimés par reconnaissance de leur faible nombre d'éléments. En fait, les éléments isolés sont distincts du maillage du modèle optimisé et se reconnaissent par un nombre total d'éléments faible. Après extraction de l'enveloppe, on compte les éléments dans chacun des maillages créés et on ne conserve que celui qui a le plus grand nombre d'éléments. Les éléments manquants sur les arêtes vives et les faces planes sont simplement réactivés. Pour ce faire pour chaque tétraèdre désactivé, l'on vérifie si ses voisins par face sont optimisés (ont été conservés dans la solution) ou

également désactivés. Si tous ses voisins sont optimisés alors on est en présence d'un élément manquant dans le modèle optimisé et on le réactive.

L'application d'une méthode de lissage impose que l'enveloppe de la forme optimisée soit *manifold*. Une enveloppe est dite *manifold* si elle est fermée, sans intersection et constituée d'un ensemble d'éléments 2D cousus entre eux pour former le solide 3D. L'enveloppe du modèle optimisé adaptée extraite ne respecte pas cette définition. Il existe plusieurs tétraèdres remplis de matière (formant donc des solides) connectés uniquement par un seul nœud ou une seule arête. Ce sont des cas de *non manifold* (voir Figure 4-3). Le traitement de ces cas est effectué en réactivant les éléments directement voisins aux nœuds et arêtes problématiques. Pour ce faire, tout d'abord on définit que l'élément voisin pour une arête donnée d'un élément est toujours celui qui a le plus petit angle matière avec l'élément en question [11]. Ainsi, un triangle aura un seul voisin par arête. Ensuite, on parcourt toutes les arêtes de l'enveloppe (la triangulation) et toute arête qui appartient à plus de deux triangles est un cas de *non-manifold* par arête.

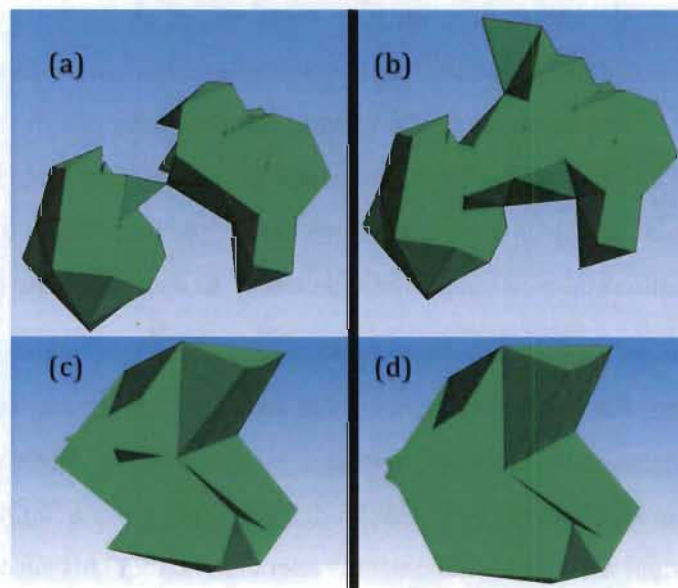


Figure 4-3 : Illustration d'un cas de *non manifold* (a) par nœud, (c) par arête, puis réactivation des éléments voisins (b) au nœud et (d) à l'arête problématiques (tirée de Picher-Martel [11]).

Similairement pour chaque nœud de l'enveloppe, on parcourt tous les triangles auxquels ce nœud appartient et ensuite partant du premier triangle de la liste, on parcourt ses voisins par arêtes et leurs voisins. Le triangle qui n'aura pas été parcouru en procédant de la sorte permettra de déceler la présence d'un cas de *non-manifold* par nœud. Les cas de *non-manifold* étant ainsi détectés, l'on réactive tous les tétraèdres désactivés qui ont cette arête ou ce nœud *non-manifold* en commun. Attendu qu'un tel procédé de réactivation d'éléments peut créer de nouveaux cas de *non-manifold*, le processus d'extraction de l'enveloppe est donc itératif et ne s'arrête que lorsque tous les cas sont résolus [11].

La Figure 4-4 montre les différentes étapes partant du résultat de la méthode SIMP adaptative (Figure 4-4a). La valeur de la densité seuil de conservation des éléments dans la forme optimisée adaptée est $\rho_{seuil} = 0,30$ (Figure 4-4b). L'enveloppe est enfin extraite sous forme de triangulation (Figure 4-4c) après suppression d'un groupe d'éléments isolés et traitement de 59 cas de *non-manifold* par arête et 7 cas de *non-manifold* par nœud et ce, à travers 6 itérations. Sur cette dernière figure, l'enveloppe de la partie de *non-design* est verte et celle de la partie optimisée est jaune. La partie en jaune est celle que nous allons transformer dans les étapes subséquentes tout en laissant l'autre partie intacte.

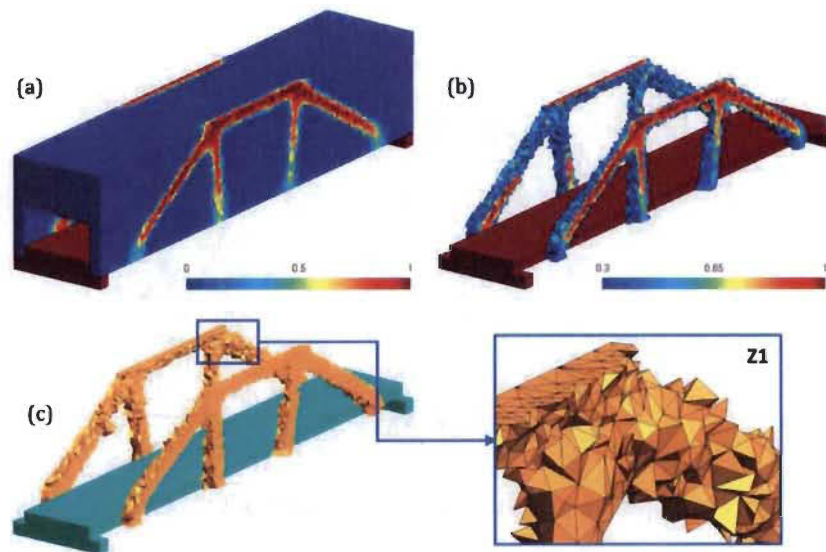


Figure 4-4 : (a) Résultat de la méthode SIMP adaptative (Figure 3-23), (b) forme optimisée adaptée pour $\rho_{seuil} = 0,30$ et (c) enveloppe de la forme optimisée adaptée.

4.4.2 Lissage de l'enveloppe

Après extraction de l'enveloppe, des itérations d'un lissage de type *Laplacien* ont été appliquées pour retrouver le volume prescrit. Le lissage consiste à déplacer un nœud P de la triangulation vers un nœud P' , moyenne pondérée des centres de gravité des triangles arrivant à P (voir Figure 4-5), comme le donne l'équation 4-1 [95].

Étant donné que ce type de lissage provoque une perte généralisée de volume du modèle et que les méthodes de lissage traditionnelles résultent en des éléments non conformes sur le maillage [11] (voir Figure 2-40), l'on effectue uniquement quelques itérations de ce lissage de manière à retrouver le plus possible le volume objectif de l'optimisation. Plus encore, puisqu'un remaillage avec des éléments tétraédriques du modèle lissé n'est pas exigé comme effectué par [17], 2 ou 3 itérations du lissage se sont avérées suffisantes pour permettre l'extraction du squelette.

$$P' = \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i c_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \omega_i = \text{dist}(P, c_i) \\ c_i = \frac{1}{3} \cdot \sum_{j=1}^3 P_j \end{cases} \quad (4-1)$$

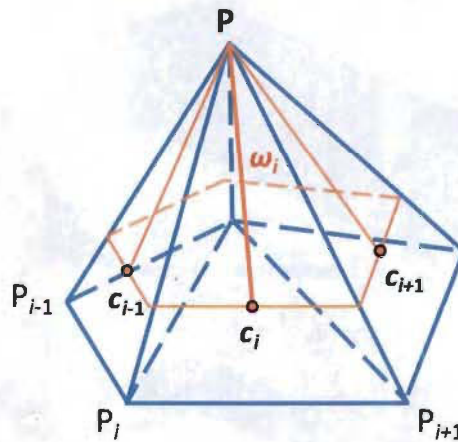


Figure 4-5 : Illustration de la méthode de lissage utilisée [95].

Trois volumes sont à distinguer :

- $V_{objectif}$

Le *volume objectif* est le volume prescrit à partir de la fraction volumique f ($V_{objectif} = \tilde{V}$, voir équation 3-5). C'est le volume objectif de l'optimisation topologique.

- V_{lisse}

Le *volume lisse* est le volume obtenu après le lissage de l'enveloppe de la forme optimisée qui est uniquement constituée de certains éléments retenus en utilisant ρ_{seuil} .

- V_{cons}

Le *volume construit* est le volume final obtenu après conversion de la structure de poutres à partir de la forme optimisée adaptée. C'est le volume des poutres construites ou encore converties.

Pour le cas de référence (Figure 4-4a), la prescription volumique est $V_{objectif} = 19,50 \text{ m}^3$ ($= f \cdot V_d = 5\% \cdot 390,60 \text{ m}^3$). Le volume obtenu après lissage uniquement de la partie optimisée est $V_{lisse} = 19,05 \text{ m}^3$. Le volume prescrit a été retrouvé après 2 itérations de lissage.

La Figure 4-6 présente l'enveloppe uniquement de la partie optimisée avant et après lissage. En détail, la Figure 4-6a est la même que la Figure 4-4c, mais sans la partie de *non-design*, et la Figure 4-6b correspond au résultat obtenu après lissage. Sur cette figure, la zone en vert représente les triangles à l'interface entre les parties optimisée et de *non-design*. Comme présenté plus loin dans la sous-section 4.5.2, cette zone sera recouverte de *mini-poutres* lors du raccordement 1D-3D.

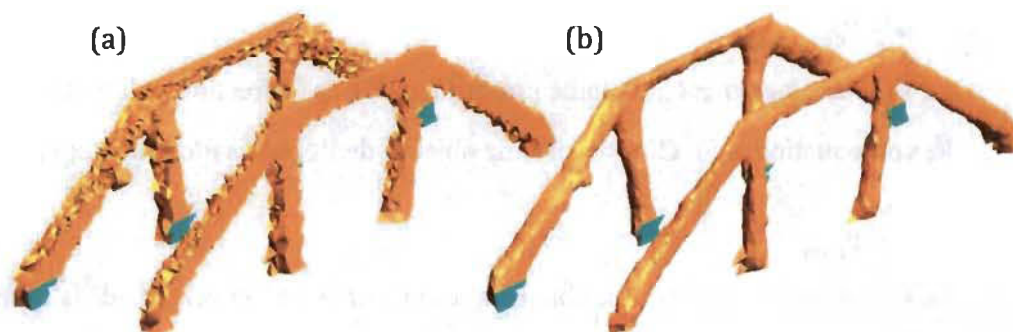


Figure 4-6 : Enveloppe de la forme optimisée adaptée (a) avant et (b) après lissage.

4.4.3 Squelettisation

Comme évoqué dans la sous-section 2.8.3, la squelettisation est un processus qui modifie la forme originelle d'un objet et en extrait une description simplifiée, tout en conservant toutes les informations pertinentes permettant de capturer la topologie dudit objet. Dans cette étude, étant donné que seuls les modèles optimisés qui s'orientent vers des structures composées de poutres sont considérés, le squelette est extrait sous forme de courbe-squelette.

4.4.3.1 Principe de courbe-squelettisation

La méthode de squelettisation employée est celle proposée par [105]. Elle est basée sur la contraction d'un nuage de points en utilisant la méthode du *Laplacien*. Le principe de la méthode de squelettisation est présenté sur la Figure 4-7. L'algorithme prend en entrée le nuage de points de l'enveloppe de la forme adaptée lissée. Ce dernier est contracté de façon itérative jusqu'à obtention d'un volume presque nul à l'aide du lissage de type *Laplacien*. Par la suite des points squelettiques sont créés en suivant un espacement spécifié, puis connectés à l'aide de segments. Un processus d'élagage est finalement appliqué pour retrouver le squelette sous forme de courbe. Les auteurs mettent ainsi à contribution le défaut bien connu du lissage *Laplacien* qui est la diminution notable de volume du modèle lissé (voir sous-section 2.8.2). De plus, la squelettisation est appliquée directement sur le maillage, ce qui enlève la nécessité de reconstruire la surface

de la forme et prend en compte les maillages bruités et qui ont perdu un certain pourcentage d'information lors de l'acquisition des données par scanners 3D [104, 105].

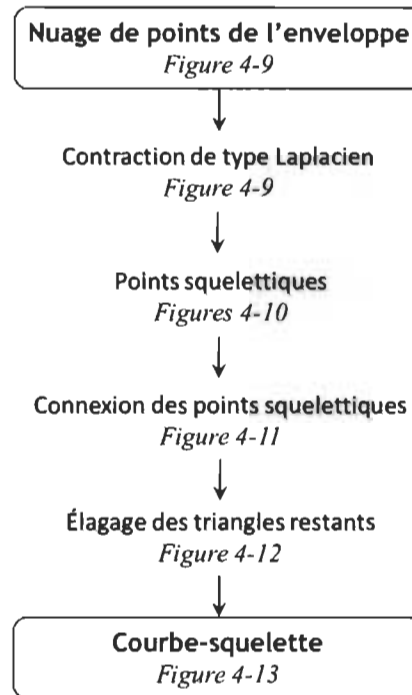


Figure 4-7 : Principe de courbe-squelettisation [105].

4.4.3.2 Contraction de l'enveloppe de la forme adaptée

Le nuage de points de la forme adaptée lissée est facilement obtenu à partir de son enveloppe (voir sous-section 4.4.1). La contraction qui s'ensuit s'appuie sur la méthode de lissage de type *Laplacien* proposée par Desbrun et *al.* [89] qui minimise une fonction énergétique définie par les caractéristiques de courbures et de normales discrètes. Le lissage par mouvement de la courbure moyenne (ou en anglais *mean curvature flow*) consiste à minimiser la variation de la courbure d'un point à un autre en déplaçant chaque point à la vitesse de sa courbure moyenne et suivant la normale à sa surface. Ceci entraîne la résolution d'une équation aux dérivées partielles sur l'ensemble des points du nuage et ce, pour chaque itération du lissage.

Considérant $P = \{p_i\}$ un nuage de points à contracter, ce dernier est mis à jour à chaque itération t du lissage de la manière suivante [104, 105] :

1. Résoudre le système : $\begin{bmatrix} W_L' L' \\ W_H' \end{bmatrix} P^{t+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ W_H' P' \end{bmatrix}$ en P^{t+1}
2. Mettre à jour les poids $\begin{cases} W_L^{t+1} = s_L W_L' \\ W_H^{t+1} = W_H^0 S_i^0 / S_i' \end{cases}$ avec $\begin{cases} W_L^0 = 1/5 S^0 \\ W_H^0 = 1,00 \end{cases}$
3. Calculer le nouvel opérateur *Laplacien* avec le nouveau point P^{t+1}
4. Le processus continue jusqu'à ce que $(S_i^{t+1} - S_i') / S_i^0 < 0,01$

Où W_L et W_H sont respectivement les poids de contraction ; s_L est le coefficient de contraction ($s_L = 3,00$) et S_i^0 , S_i^t et S^0 sont respectivement les surfaces initiale, courante et moyenne initiale du premier anneau de voisinage. L'opérateur *Laplacien* est défini tel que $L_{ij} = \omega_{ij} = \cot \alpha_{ij} + \cot \beta_{ij}$. En considérant un point p_i du nuage, α_{ij} et β_{ij} sont les angles opposés à l'arête (p_i, p_j) qui fait partie du premier anneau de voisins de p_i comme schématisé sur la Figure 4-8.

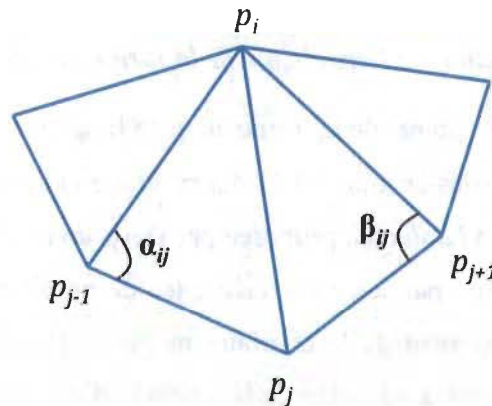


Figure 4-8 : Illustration des angles opposés à l'arête (p_i, p_j) qui est dans le premier anneau de voisinage du point p_i (inspirée de Desbrun et al. [89]).

Par ailleurs, afin d'accélérer la contraction on agit sur le poids W_L qui est, pour chaque point, augmenté après chaque itération. D'un autre côté pour éviter une contraction excessive, le poids d'attraction W_H est mis à jour après chaque itération et pour chaque point en fonction de son degré de diminution déterminée par la surface locale de son premier anneau de voisins [105]. Le but est que les points de petite surface de voisinage soient fortement attirés dans leur position courante et faiblement contractés, contrairement aux points de grande surface de voisinage. Durant ce processus de contraction le lissage est implicite, ce qui réfère au schéma d'intégration numérique implicite employé afin d'assurer la stabilité du schéma numérique pour des pas en temps plus élevés. En revanche, son application nécessite la connaissance du premier anneau de voisinage de chaque point du nuage. Pour ce faire l'on approxime d'abord les k voisins les plus proches de chaque point p_i . Ces derniers sont par la suite projetés sur leur plan tangent et triangulés avec la méthode de Delaunay. Le premier anneau de voisins, c'est-à-dire l'ensemble des points accessibles par au plus k arêtes, nécessaire pour la contraction est finalement obtenu à partir de cette triangulation locale. Il est préconisé $k \in [8, 30]$ par les auteurs [105] ; $k = 30$ dans tous les exemples de ce document.

La Figure 4-9a illustre le nuage de points de l'enveloppe de la forme adaptée lissée avant et après la contraction. Il apparaît que le nuage de points contracté n'est pas totalement filaire, surtout dans les zones de jonction pour lesquelles un traitement particulier sera appliqué.

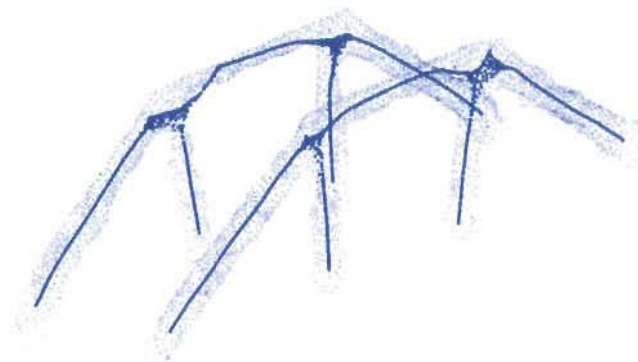


Figure 4-9 : Nuage de points de l'enveloppe avant et après contraction.

4.4.3.3 Création des points squelettiques

La structure squelettique, qui comprend l'ensemble des points squelettiques, est construite par échantillonnage des points contractés. En effet, considérant une sphère de rayon fixe r , tous les points dans le voisinage d'un point contracté p'_i qui sont inclus dans cette sphère sont remplacés par un point squelettique. En procédant de la sorte, on aboutit à une distribution uniforme des points squelettiques.

La Figure 4-10 présente le processus de création des points de la structure squelettique obtenue après échantillonnage en utilisant $r = 0,018 \times d_{bbox} = 395 \text{ mm}$ avec d_{bbox} la plus grande diagonale de la boîte englobante du modèle. Il est évident qu'un choix non judicieux de r aura des répercussions non négligeables sur la forme finale du squelette [105]. De fait, un r trop grand provoquera des pertes d'information notamment aux jonctions et des distorsions de la courbe squelette alors qu'un r trop petit créera des éléments indésirables sur le squelette à élaguer par la suite. Les Figure 4-10a et Figure 4-10b montrent respectivement le nuage de points contractés partiellement et totalement échantillonné. La Figure 4-10c illustre les points squelettiques qui en résultent. Ceux-ci seront ensuite connectés par des segments afin de former la courbe-squelette.

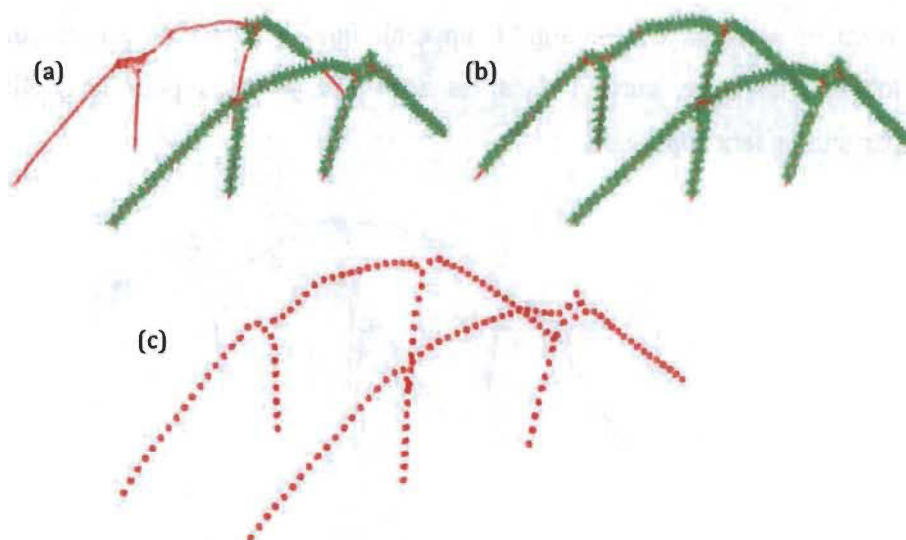


Figure 4-10 : Illustration de la création des points squelettiques.

4.4.3.4 Connexion des points squelettiques

À cette étape les points squelettiques sont connectés entre eux à l'aide de segments en se basant sur le premier anneau de voisins. En effet, lors de la phase précédente d'échantillonnage, un ensemble de points contractés dans un rayon r étaient remplacés par un point squelettique. À chaque point squelettique était donc associé un certain nombre de points contractés. Les informations sur ces derniers sont maintenant utilisées pour connecter les points squelettiques. C'est ainsi que deux points squelettiques sont connectés par un segment si et seulement si leurs points contractés associés respectifs partagent le même premier anneau de voisins [105]. Cet état de fait crée, à certains endroits comme les zones de jonction, des triangles. Ces derniers sont mis en exergue sur la Figure 4-11 qui présente les segments créés lors de la connexion des points squelettiques de la Figure 4-10c, avec un zoom sur les triangles dans certaines zones de jonction.

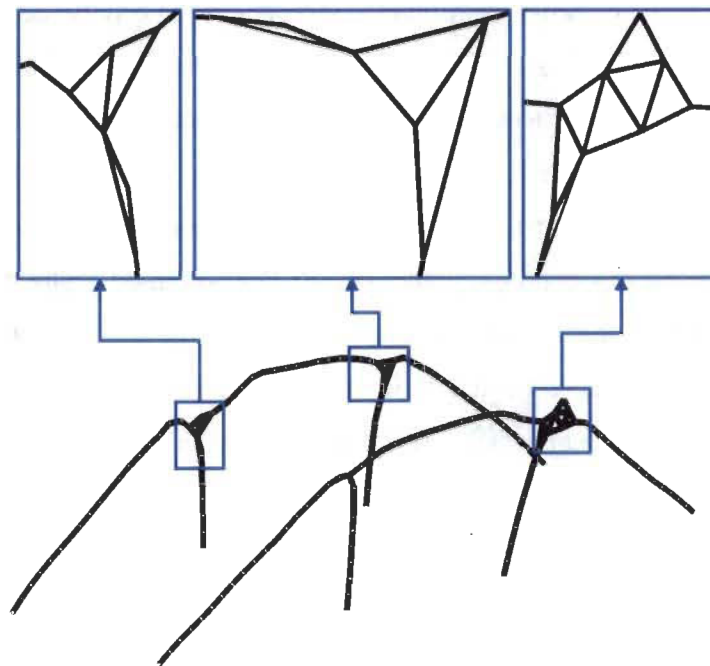


Figure 4-11 : Connexion des points squelettiques (en blanc) avec des segments (en noir) et zoom des triangles à élaguer.

4.4.3.5 Élagage des triangles

Le but étant d'obtenir une *courbe-squelette*, un élagage (en anglais *edge collapse*) de ces triangles et une redistribution des points dans ces zones sont effectués de manière itérative afin d'épurer le squelette et de ne conserver que les parties significatives sous forme d'une courbe. C'est à cet effet que pour chaque segment est créée la liste des triangles incidents qui seront supprimés par l'élagage. Tous les segments n'ayant aucun triangle incident sont considérés comme segments du squelette et ne sont pas modifiés durant le processus. À chaque itération on crée d'abord un point au milieu du segment de plus petite longueur. Au nouveau point créé, on associe les points contractés des deux extrémités du segment sélectionné. Pour finir, ledit segment et ses triangles incidents sont supprimés. Le processus continue de la sorte jusqu'à ce que tous les triangles soient supprimés.

L'élagage ainsi réalisé des triangles semble être à l'origine de la mauvaise définition du squelette aux points de jonction. En effet, pour une jonction donnée contenant des triangles, le segment par lequel on va commencer l'élagage influencera la position du point final *central* de la jonction. Une alternative pourrait être, pour une jonction donnée, tout d'abord d'identifier les segments du squelette ayant des triangles incidents qui participent à la jonction. Calculer ensuite la position du centre du polygone formé par les points d'extrémité de ces segments. Trouver parmi tous les points de la jonction le point le plus proche de ce centre et le conserver tout en supprimant tous les triangles de la jonction. Enfin, connecter directement les segments du squelette avec le point central précédemment conservé, ou alors utiliser le rayon d'échantillonnage r (voir sous-section 4.4.3.3) pour ajouter des points squelettiques avant la connexion.

La Figure 4-12 fait particulièrement ressortir l'ensemble des segments qui constitue la courbe-squelette. Cette figure est la même que la Figure 4-11, mais après élagage des triangles.

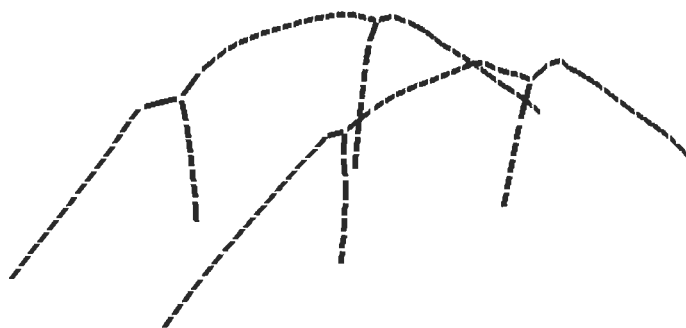


Figure 4-12 : Illustration des segments de la courbe-squelette après élagage.

La Figure 4-13 présente la courbe-squelette avec le nuage de points de l'enveloppe. Ce squelette comprend 8 points d'extrémité, 4 points de jonction, 10 branches (8 d'une extrémité à une jonction et 2 entre les deux jonctions) et 127 segments. Ces derniers seront utilisés dans la suite de la conversion en modèle CAO, plus particulièrement dans le calcul du rayon des sections et la normalisation.

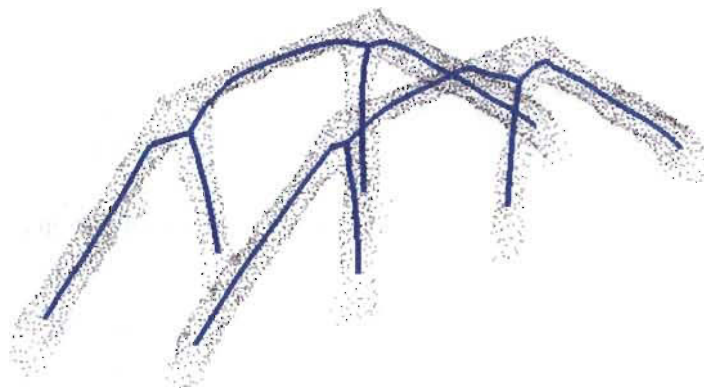


Figure 4-13 : Nuage de points et courbe-squelette.

4.4.4 Calcul du rayon des sections

Chaque segment de la courbe-squelette précédemment extraite est assimilé à un morceau de poutre cylindrique de même longueur que le segment considéré. Dans cette partie, le rayon de la section transversale de chacun de ces morceaux de poutres, approximé par la distance de l'axe de la poutre à la frontière structurale, est calculé.

Les Figure 4-14 et Figure 4-15 présentent respectivement l'algorithme du calcul du rayon de la section transversale de chaque morceau de poutre et une illustration de ce principe en 2D.

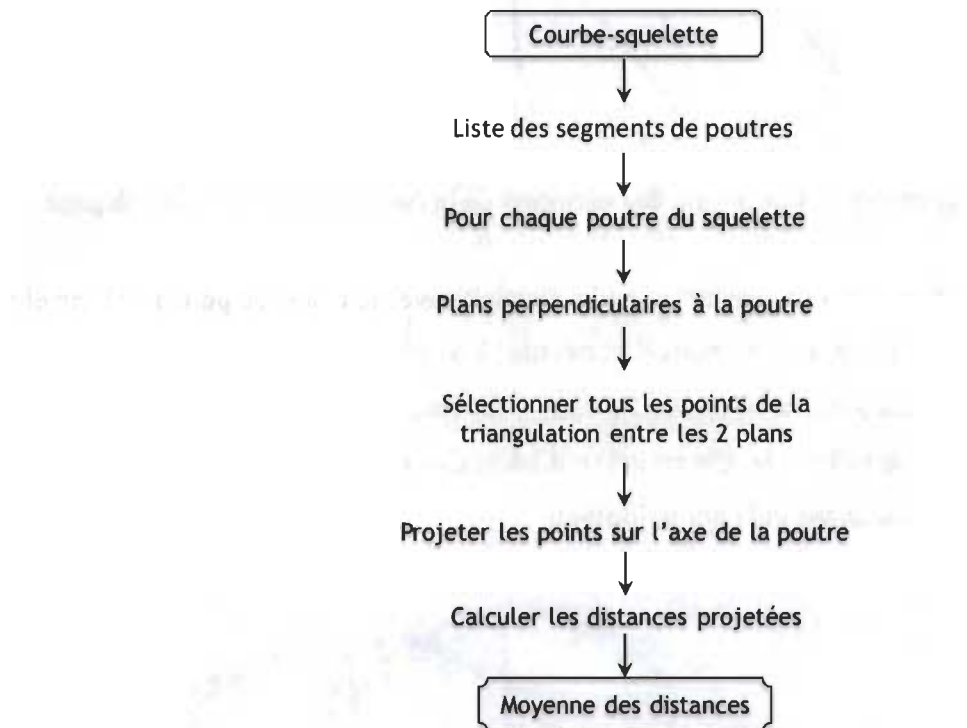


Figure 4-14 : Algorithme du calcul du rayon de section.

L'on considère que chaque morceau de poutre a une section circulaire dont le rayon, constant le long de la poutre, est à déterminer. Cette première approximation provient des observations effectuées sur plusieurs structures optimisées s'orientant vers des structures de poutres. C'est qu'en effet, du fait principalement de la qualité du résultat de l'optimisation et de la méthode de lissage utilisée, ces dernières sont en général de forme organique et cylindrique (plus encore après lissage), avec une section globalement ovale. Aussi, le disque permet d'avoir un seul paramètre de section transversale à calculer qui est son rayon, et ne nécessite pas d'avoir des arêtes vives conservées ou reconstruites après lissage pour éventuellement reconnaître la forme géométrique sous-jacente. C'est ce rayon

qui est calculé à travers la distance de l'axe de la poutre à la l'enveloppe de la forme optimisée adaptée lissée.

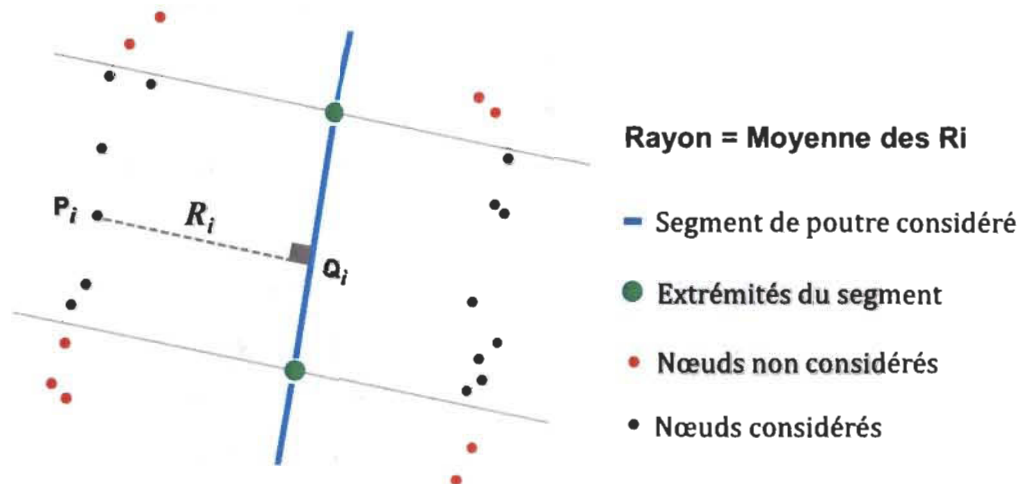


Figure 4-15 : Illustration du principe de calcul du rayon de section.

Ainsi, compte tenu du nuage de points découlant de la triangulation de l'enveloppe lissée et considérant un morceau de poutre du squelette (en bleu sur la Figure 4-15), les plans perpendiculaires à l'axe et passant par chacune des deux extrémités (en vert sur la Figure 4-15) du morceau de poutre sont déterminés en premier. Ces deux plans (en ligne continue grise sur la Figure 4-15) sont utilisés pour choisir les points de la triangulation à considérer (en noir sur la Figure 4-15) et ceux à ignorer (en rouge sur la Figure 4-15) lors du calcul du rayon de la section. Les points retenus sont finalement projetés orthogonalement sur l'axe de la poutre et la valeur de la distance projetée, notée $R_i = P_i Q_i$ (avec i = indice du point à projeter), est retenue (en ligne interrompue grise sur la Figure 4-15). La moyenne simple des R_i , en d'autres termes la somme des distances projetées divisée par le nombre de points, est affectée au morceau de poutre comme valeur du rayon de sa section transversale.

Dans ce calcul, un point de la triangulation n'est utilisé qu'une seule fois. Autrement dit, si un point est utilisé dans le calcul du rayon d'un morceau de poutre, il ne peut plus être utilisé pour le calcul du rayon d'un autre morceau de poutre. Une exception à cette règle

est faite pour le calcul du rayon d'un morceau de poutre arrivant à un point de jonction, où les points peuvent être utilisés pour plusieurs calculs. Cette méthode de *moyennage* a l'avantage d'être automatique et indépendante du niveau de lissage de la triangulation. En effet, cette moyenne peut être effectuée sur l'enveloppe originale (voir Figure 4-6a) sans besoin de traitement supplémentaire. Elle peut également être considérée comme un lissage des valeurs de différents rayons de section d'une poutre droite par morceaux afin de lui affecter la valeur moyenne correspondante.

La Figure 4-16 illustre (en *m*) le résultat de l'application de l'algorithme de calcul du rayon de la section transversale de chaque morceau de poutre de la courbe-squelette illustrée sur la Figure 4-13. On remarque entre autres que les valeurs les plus faibles apparaissent sur les éléments transversaux. Le rayon maximal obtenu est de 0,46 *m* et le rayon minimal de 0,14 *m*.

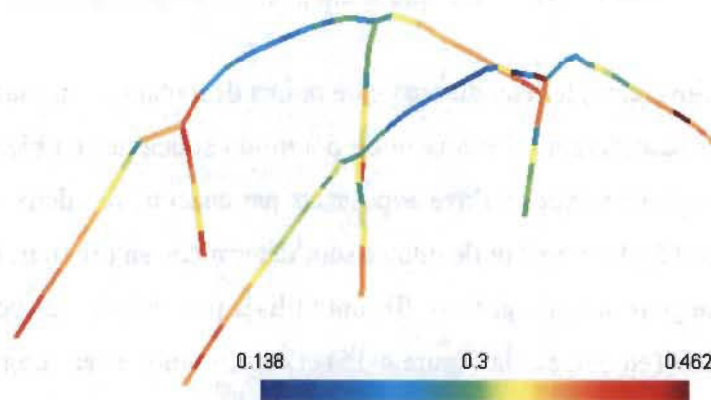


Figure 4-16 : Répartition du rayon de la section transversale de chaque segment de poutre de la courbe-squelette (en *m*).

4.4.5 Normalisation

La normalisation est le processus par lequel les morceaux de poutre d'une même branche sont transformés en une seule poutre droite. Ceci revêt un certain intérêt au niveau de la conversion de la forme optimisée adaptée en un modèle facilement fabricable de manière traditionnelle [7]. En effet, les considérations de fabrication, parfois intégrées

dans le processus d'optimisation topologique sous forme de contraintes de fabrication (voir section 2.6), influencent le coût du produit, le procédé de fabrication à utiliser, et donc le choix de la forme optimisée. Ces contraintes comprennent par exemple le contrôle du gradient de taille, des trous à l'intérieur d'une pièce à mouler, des dimensions maximales et minimales, et des formes géométriques introduites durant le processus d'optimisation [3]. La mise en œuvre d'une telle technique varie en fonction de la méthode d'optimisation considérée. Les méthodes d'optimisation topologique généralement utilisées pour incorporer la majorité de ces contraintes sont les méthodes SIMP et *level-set* [3, 132].

La méthodologie de conversion en modèle CAO développée dans cette thèse utilise l'optimisation topologique *classique*, c'est-à-dire, sans ajout de contraintes supplémentaires comme les contraintes de fabrication.

La Figure 4-17 présente le principe de normalisation utilisé. Le *point de départ* est un point d'extrémité ou de jonction à partir duquel l'on recherche un segment voisin, puis l'autre nœud du segment. Le segment étant obtenu, deux possibilités sont à distinguer. Dans le premier cas, si l'autre nœud du segment est un point d'extrémité ou de jonction (différent du *point de départ*), alors ce nœud est un *point d'arrivée*, et on crée une poutre droite entre les points de *départ* et *d'arrivée*. Pour finir, le segment est tagué comme parcouru, et son rayon affecté au rayon de la poutre droite. Dans le deuxième cas, l'on tague le segment et continue de parcourir les segments voisins jusqu'à tomber sur un point d'extrémité ou de jonction. Ce point devient donc le *point d'arrivée*. Une moyenne des rayons des sections de tous les segments parcourus est effectuée et la valeur obtenue assignée à la poutre droite créée entre les points de *départ* et *d'arrivée*. Le processus continue jusqu'à ce que tous les segments du squelette soient parcourus. Ce dernier cas est schématisé sur la Figure 4-18 à l'aide de 3 branches d'une courbe-squelette.

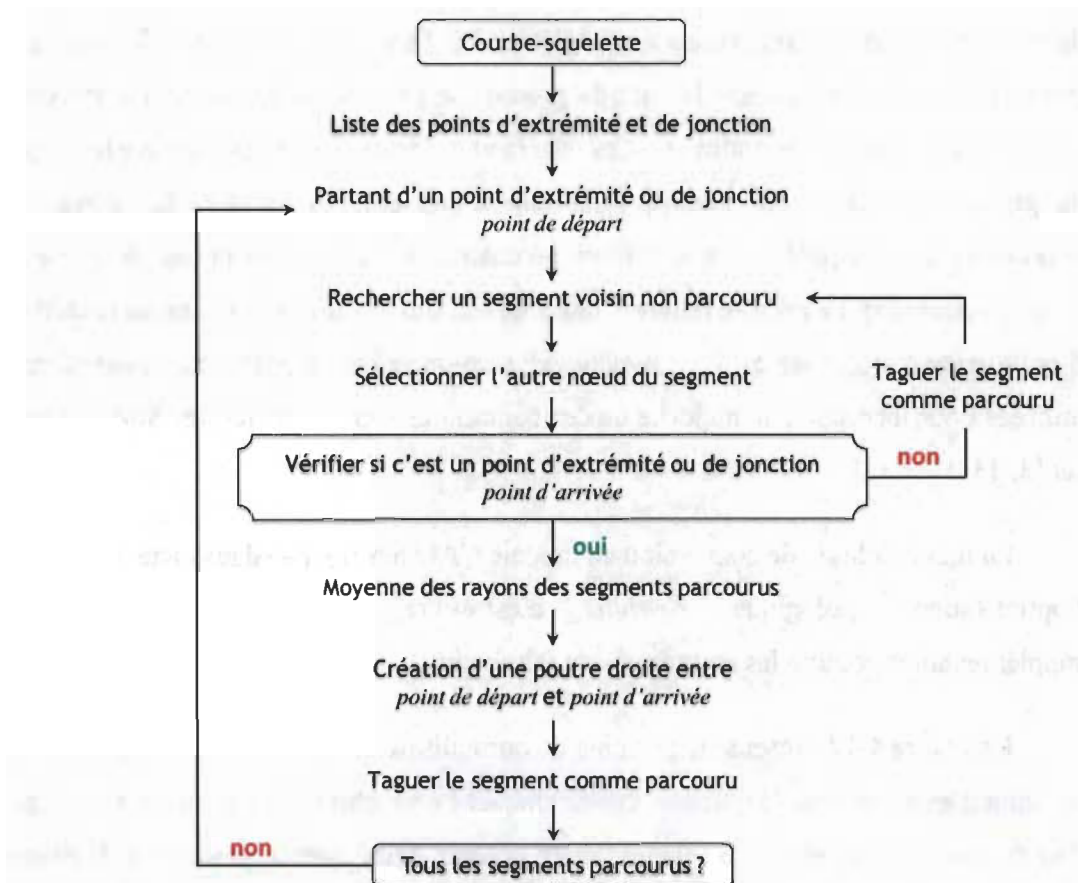


Figure 4-17 : Principe de la normalisation.

Sur la Figure 4-18, le point d'extrémité est en vert et le point de jonction en jaune. Tous les morceaux de poutres d'une même branche (exemple de la branche B_1) sont transformés en une seule poutre droite. Le rayon de la section de la nouvelle poutre est la moyenne simple des rayons des sections de chacun des morceaux de poutres constituant la branche considérée (exemple des 12 morceaux de poutres de la branche B_1). La longueur de la poutre quant à elle est la distance entre les deux extrémités de la branche considérée.

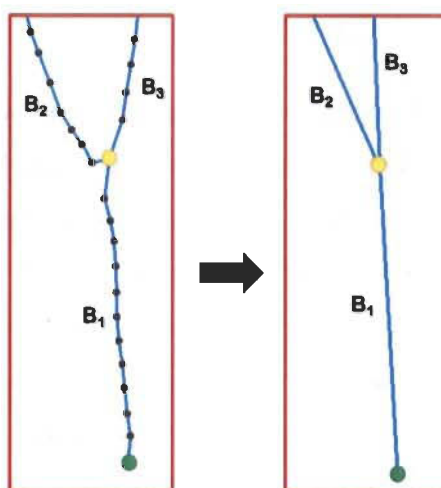


Figure 4-18 : Illustration de 3 branches d'une courbe-squelette (a) avant et (b) après normalisation, avec un point d'extrémité (en vert) et un point de jonction (en jaune) (tirée de Nana et *al.* [16]).

La Figure 4-19 est la même que la Figure 4-16, mais après normalisation. On est passé de 10 branches curvilignes et constituées de morceaux de poutres à 10 poutres droites. Cette figure illustre également la répartition de la taille de chacune des nouvelles poutres droites en m . Le rayon maximal obtenu est de $0,37\text{ m}$ et minimal de $0,22\text{ m}$. Comparativement à la Figure 4-16, il apparaît que la normalisation augmente le potentiel de fabrication traditionnelle (en opposition à la fabrication additive) de la forme optimisée.

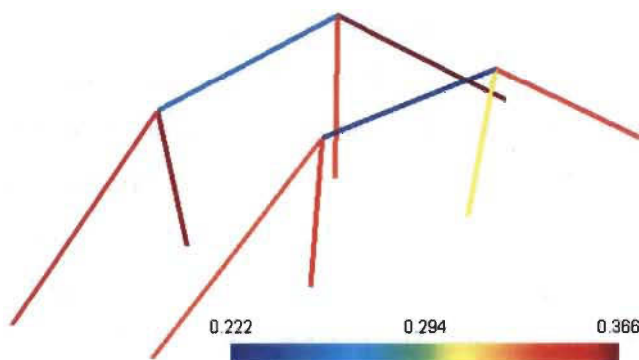


Figure 4-19 : Répartition du rayon de la section transversale de chaque poutre normalisée (en m).

4.4.6 Modèle CAO

La Figure 4-20 permet de visualiser le modèle CAO converti à partir du résultat de la méthode SIMP adaptative présenté sur la Figure 4-4a. On obtient un modèle B-REP [118] qui comprend une partie structurale faite de primitives cylindriques (en gris) et une partie volumique issue du *non-design* (en rouge). Comme mentionné dans la sous-section 3.3.2, cette représentation est utilisée dans la majorité des logiciels de CAO et modélise un objet par sa peau ou frontière. Cette dernière est représentée par un ensemble de faces (entités 2D) orientées de manière à distinguer l'intérieur et l'extérieur du modèle. Chaque face est définie géométriquement par une surface et délimitée par un ou des contours fermés et orientés. Chaque contour est représenté géométriquement par des courbes et formé d'un ensemble d'arêtes (entités 1D). Chaque arête est délimitée par des sommets (entités 0D) définis de façon mathématique par des points. La représentation B-REP allie donc les informations qualitatives sur les relations entre faces, arêtes et sommets du modèle, aux informations quantitatives telles que les équations des surfaces, courbes et positions des sommets.

Pour retrouver le modèle CAO, les paramètres des poutres cylindriques sont obtenus à partir des caractéristiques géométriques précédemment calculées tels que les deux extrémités et le rayon de chaque poutre normalisée (voir Figure 4-19). Le modèle B-REP correspondant est créé sous forme d'un assemblage de poutres droites. Ce dernier est enregistré dans le format d'échange standard STEP (pour *Standard for the Exchange of Product Model Data*) puis assemblée avec la partie de *non-design* dans un logiciel de CAO. Ensuite, dans le seul but d'améliorer l'aspect visuel du modèle, des sphères sont créées aux extrémités des poutres en utilisant les outils dudit logiciel. C'est le résultat de ce procédé qui est présenté sur la Figure 4-20. Lors de la conversion de la passerelle utilisée comme cas test, la prescription volumique initiale, rappelons-le, était de $V_{objectif} = 19,50 \text{ cm}^3$. Le volume de la partie optimisée convertie sous forme de poutres droites et qui est en fait le volume total des poutres est $V_{cons} = 18,03 \text{ m}^3$.

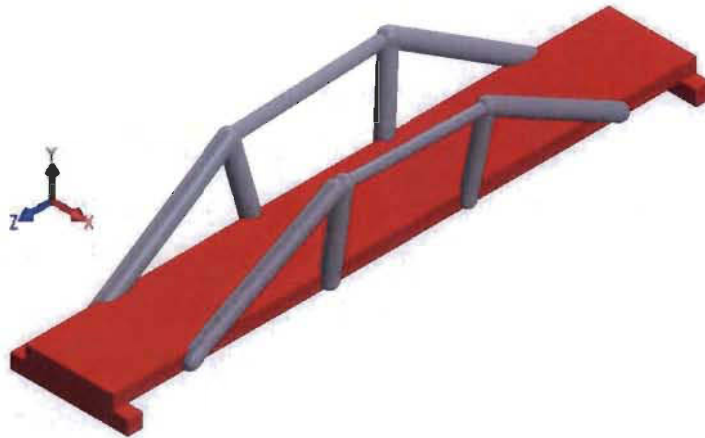


Figure 4-20 : Modèle CAO obtenu à partir de la Figure 4-4c. Partie convertie en gris et partie de *non-design* en rouge.

4.5 Validation du modèle converti

La validation est un processus par lequel une vérification est faite pour s'assurer que le modèle représente bien la réalité. Partant du fait que le modèle (ou la simulation) est réaliste, le but est d'établir une adéquation entre ce modèle et le système réel. Dans le contexte de nos travaux, le modèle optimisé adapté est assimilé à une solution réelle et la validation consiste à analyser par éléments finis le modèle converti puis comparer les résultats avec ceux du modèle optimisé adapté. En effet, tout comme ce dernier, le modèle converti doit respecter le cahier des charges initial. Il s'agit ici de la contrainte volumique et des conditions aux limites et de chargement. L'objectif de l'optimisation étant de réduire la compliance, celle-ci est notre principal critère de validation. Toutefois, il est bien connu que le champ des contraintes est un élément important analysé lors de la conception de pièces et structures. Une répartition des contraintes dans les poutres droites construites lors de la conversion est également présentée.

4.5.1 Modèle 1D-3D

Afin de valider le modèle converti, une étude multidimensionnelle est effectuée en utilisant des éléments finis linéaires 1D (poutre) et 3D (tétraèdre), tout en appliquant les mêmes conditions aux limites et de chargement que le modèle initial. La partie squelettique (en noir sur la Figure 4-21) est maillée avec des éléments poutres et la partie volumique (en vert sur la Figure 4-21) avec les éléments tétraédriques. L'énergie de déformation de l'ensemble, obtenue à partir de l'énergie de déformation dans chaque élément fini est calculée, ce qui permet d'en déduire la compliance correspondante.

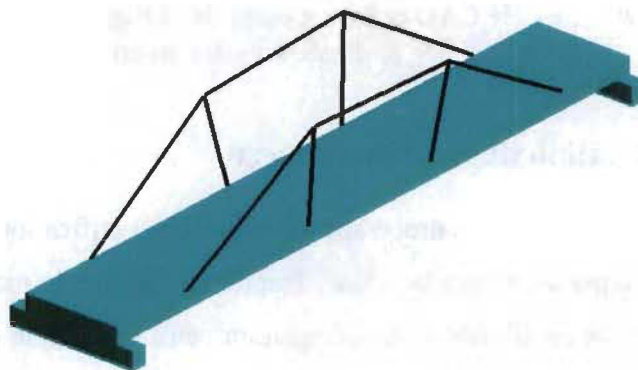


Figure 4-21 : Modèle 1D-3D.

4.5.2 Raccordement du squelette (1D) au volume (3D)

Le modèle converti, qui comme illustré ci-dessus contient à la fois une partie filaire et une partie volumique, soulève la question du raccordement des deux parties. Conserver l'avantage de la réduction de la dimension du modèle, du nombre et du type d'éléments du maillage, aussi bien que celui de la rapidité de calcul, demande une méthode de connexion appropriée. Cette dernière doit être automatique pour notamment permettre l'automatisation du processus global d'interprétation. Pour y arriver, des mini-poutres [133, 134] sont utilisées.

Une mini-poutre est une poutre de section infiniment rigide servant de connexion entre deux composantes [134]. Les mini-poutres servent à assurer la continuité des degrés de liberté entre les éléments 1D et 3D, comme le montre la Figure 4-22, où des mini-poutres ont été introduites sur tous les segments arrivant au nœud de raccord (nœud commun aux mini-poutres et à la poutre principale). À l'exception du nœud de raccord qui est un joint rigide, les nœuds d'extrémité des mini-poutres (8 nœuds sur la Figure 4-22) sont des joints de type rotule. Ainsi, les rotations de la poutre principale sont transmises aux nœuds du volume sous forme de translations par les mini-poutres et la transmission des déplacements est assurée à l'aide des rotules. L'ensemble mini-poutres et poutre principale forme un tout rigide à travers le joint rigide, ce qui élimine l'effet rotule global et assure le transfert du moment de flexion [134].

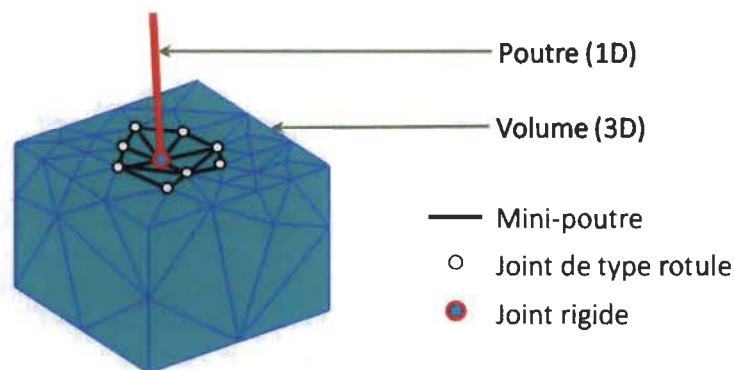


Figure 4-22 : Illustration de l'ajout de mini-poutres (inspirée de [134]).

À notre connaissance, les mini-poutres ont été introduites dans les travaux de Craveur et *al.* [133]. Leur utilisation dans ce projet revêt un triple intérêt. Premièrement, elles permettent de contourner les problèmes d'assemblage entre les maillages des 2 parties 1D et 3D (poutres pour la partie linéique et tétraèdres pour la partie volumique). Deuxièmement, l'on s'en sert également pour passer outre le problème de compatibilité entre les degrés de liberté puisque chaque nœud d'un élément tétraédrique linéaire possède 3 degrés de liberté qui sont les 3 translations, alors que chaque nœud d'un élément poutre à 2 nœuds possède 6 degrés de liberté qui sont les 3 translations et les 3 rotations.

Troisièmement, elles assurent la transmission de toutes les translations et de toutes les rotations à la connexion entre les éléments poutres et les éléments tétraédriques.

Les mini-poutres offrent l'avantage de ne pas nécessiter un solveur particulier. Elles ne requièrent pas d'ajustement du maillage. Ces ajustements comprennent par exemple le fait d'ajuster la taille du maillage de manière à générer les nœuds aux endroits propices, ou encore le fait d'insérer directement des nœuds à l'intersection et lors du remaillage local. Elles ne requièrent pas non plus de modifications de la géométrie (par exemple, lors de l'insertion d'un sommet à chaque point d'intersection avec une entité de façon à garantir sa présence après le maillage pour la connexion). Pour finir, la mise en œuvre des mini-poutres ne nécessite pas l'ajout d'éléments finis particuliers (exemple des éléments volumiques avec degrés de liberté en rotation) ni l'addition d'équations supplémentaires pour l'analyse ou pour contraindre le maillage [134].

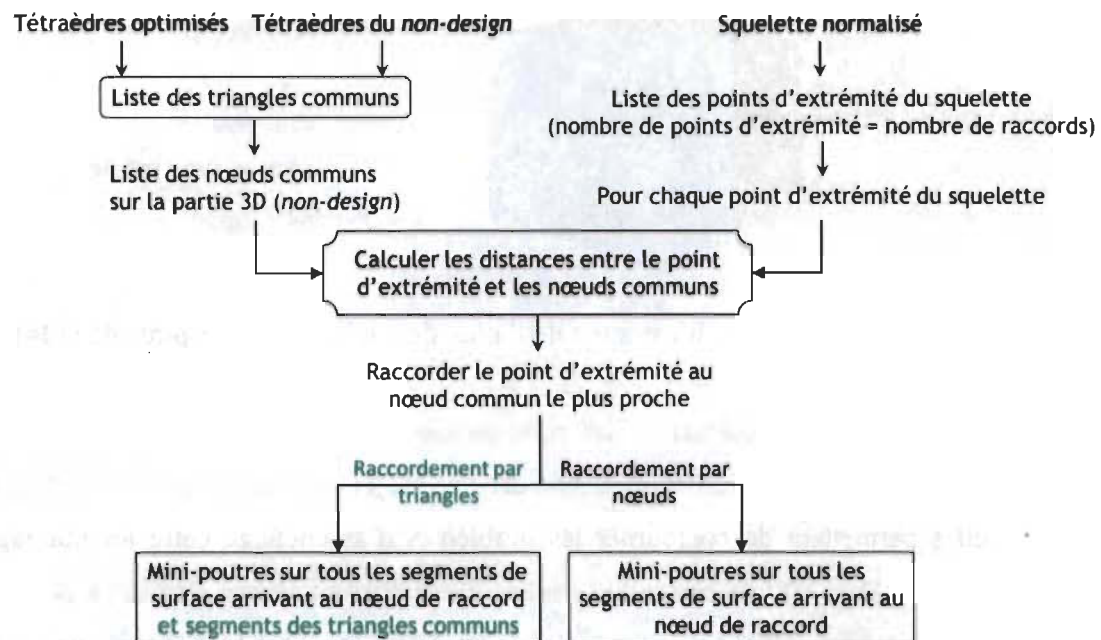


Figure 4-23 : Principe du raccordement 1D-3D.

La Figure 4-23 présente le principe de raccordement. Pratiquement, l'on détermine tout d'abord les nœuds d'extrémité de toutes les poutres à raccorder avec la partie volumique (ou de *non-design*). Par la suite, les triangles communs à la partie optimisée (en jaune sur la Figure 4-4a) et à la partie de *non-design* (en vert sur Figure 4-4c) sont également déterminés. Ces triangles sont en vert sur la Figure 4-25 (voir aussi Figure 4-6). À partir des triangles communs, l'on déduit les nœuds communs qui ne sont rien d'autre que les nœuds des triangles communs. En considérant que le nœud d'extrémité de la poutre est situé sur son axe neutre, un raccord est effectué entre ce dernier et le nœud commun le plus proche sur la surface du volume. Deux configurations sont à distinguer : le *raccordement par nœuds* et le *raccordement par triangles*.

Lors du raccordement par nœuds, des mini-poutres sont introduites sur toutes les arêtes ayant en commun le nœud de raccord. Ceci est illustré sur la Figure 4-24, où les zooms **D1** et **D2** montrent les mini-poutres du même nœud de raccord avec (pour D1) et sans (pour D2) *non-design*. Sur cette figure l'on remarque facilement, pour le raccord mis en relief, la création de 5 mini-poutres à la surface du tablier du modèle de référence, pour un total de 49 mini-poutres pour tout le modèle.

Par contre, lors du raccordement par triangles (voir Figure 4-25), les mini-poutres sont introduites non seulement sur toutes les arêtes auxquelles le nœud de raccord appartient, mais également sur toutes les arêtes des triangles communs aux éléments du *non-design* et ceux optimisés. Pour ce faire, l'on procède en deux étapes. On commence par identifier tous les triangles qui appartiennent à la fois à un tétraèdre optimisé, autrement dit un tétraèdre retenu à l'aide de ρ_{seuil} pour constituer le modèle optimisé adapté, et à un tétraèdre du *non-design* (voir zoom **D3** Figure 4-25 et les parties en vert sur la Figure 4-6). Par la suite, des mini-poutres sont ajoutées (voir zoom **D4** Figure 4-25) à cette interface. Dans le cas spécifique du modèle de cas test, l'on constate que pour le même raccord mis en évidence précédemment (Figure 4-24), le nombre de mini-poutres est passé de 5 à 34, et le nombre total de mini-poutres du modèle converti de 49 (Figure 4-24) à 241 (Figure 4-25). Ceci donne une moyenne de 30 mini-poutres par

zone de raccordement par triangles, comparativement à 6 mini-poutres pour le raccordement par nœuds.

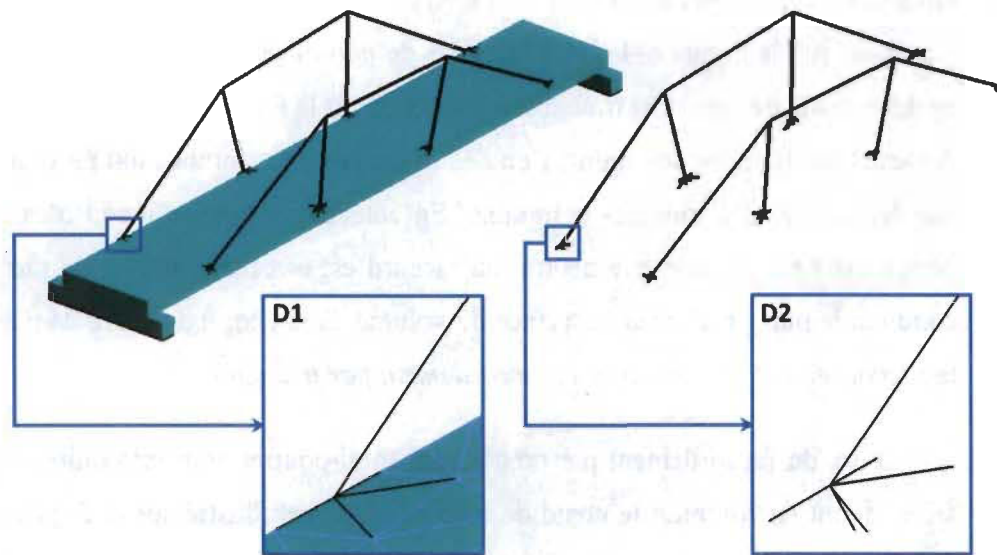


Figure 4-24 : Illustration du *raccordement par nœuds* avec les mini-poutres.

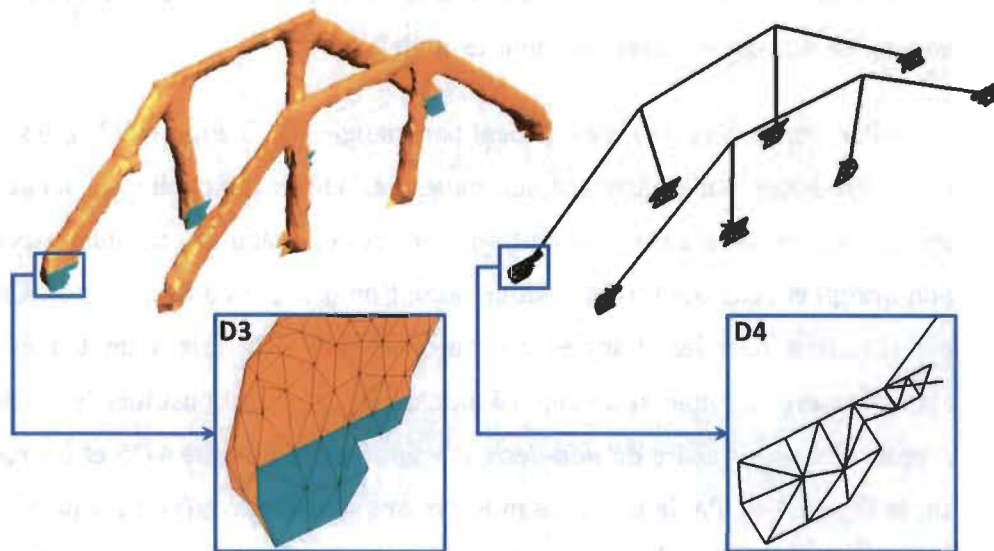


Figure 4-25 : Illustration du *raccordement par triangles* avec les mini-poutres.

4.5.3 Maillage du modèle converti

En vue de procéder à une analyse par éléments finis d'une pièce ou structure, cette dernière doit être discrétisée. Ayant un modèle multidimensionnel où les conditions aux limites et de chargement sont appliquées dans la partie volumique ou de *non-design*, le maillage doit être adapté aux entités considérées. C'est pourquoi les poutres cylindriques ont été maillées avec des éléments finis de poutre à deux nœuds (un nœud à chaque extrémité), soit six degrés de liberté par nœud (trois translations et trois rotations). Le maillage de la partie de *non-design* est le même que celui utilisé lors de l'optimisation topologique par la méthode SIMP adaptative, étant donné que ce dernier est resté inchangé. L'écart nodal utilisé pour le maillage des poutres est la moyenne de la longueur des segments du maillage 3D. Ceci conduit à un modèle maillé avec des éléments finis mixtes 1D-3D.

Le résultat du maillage du modèle converti est illustré sur la Figure 4-26. Sur cette figure, le maillage de la partie volumique est le même que celui de la partie de *non-design* du modèle optimisé adapté présenté sur la Figure 4-4a.

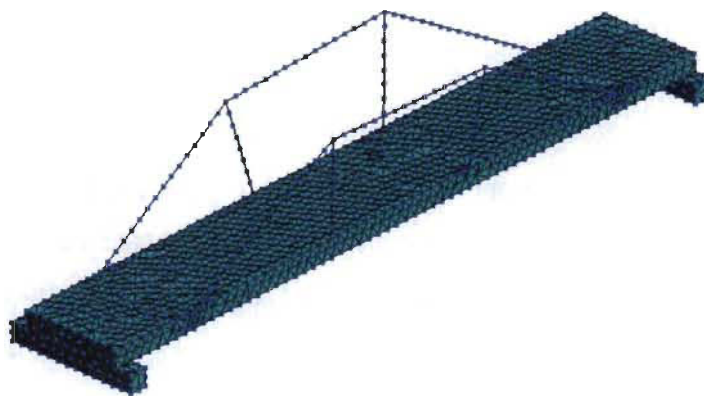


Figure 4-26 : Modèle 1D-3D de calcul.

4.5.4 Résultats de l'étude multidimensionnelle

Rappelons que la compliance est dérivée à partir de l'énergie de déformation dans chaque élément du modèle en ayant recours à l'équation $C = 2 \cdot W$. Similairement aux trois volumes, trois types de compliance sont à distinguer :

- \tilde{C}

La *compliance globale* ou encore la compliance du modèle entier à la fin de l'optimisation. Elle est obtenue par analyse par éléments finis (AEF) 3D durant l'optimisation. Elle a largement été abordée dans les sections 3.3 (voir équation 3-5) et 3.4 du chapitre précédent. Elle est affectée par la densité de matière ρ , d'où son chapeau \sim . Elle considère tous les éléments du modèle, ce qui veut dire qu'elle prend aussi en compte la compliance des éléments qui ne sont pas retenus pour former le modèle optimisé adapté. Elle est calculée à partir de \tilde{W}_e en utilisant $\tilde{C} = 2 \cdot \tilde{W}$, avec $\tilde{W} = \sum_e \tilde{W}_e$, qui est la somme des énergies de déformation dans chaque tétraèdre du modèle entier. \tilde{W}_e est obtenue par AEF et de sa valeur on en déduit \tilde{C} .

- C_{eff}

La *compliance effective* est la compliance obtenue par analyse par éléments finis 3D du modèle optimisé. Elle diffère de la précédente parce qu'elle ne considère que les éléments constituant le modèle optimisé adapté et n'est pas affectée par la densité de matière ρ (donc le module d'Young est constant), d'où l'absence de chapeau. Elle est également calculée en utilisant $C_{eff} = 2 \cdot W_{eff}$, où $W_{eff} = \sum_e W_e$ est la somme des énergies de déformation dans chaque élément fini tétraédrique constituant le modèle optimisé adapté. C'est donc W_e qui est obtenue par analyse par éléments finis 3D.

- C_{cons}

La *compliance construite* ou encore *compliance du modèle converti* est la compliance obtenue à la fin de l'analyse par éléments finis mixtes 1D-3D de la structure construite en

utilisant la méthodologie développée dans ce travail. Les mêmes conditions mécaniques que celles du problème d'optimisation (voir sous-section 3.3.1) ont été utilisées. Comme les deux précédentes compliances, elle est calculée en utilisant $C_{cons} = 2 \cdot W_{cons}$, avec $W_{cons} = \sum_p W_p + \sum_e W_e$, la somme des énergies de déformation dans chaque élément fini de poutre et tétraédrique constituant le modèle converti. Semblable à C_{eff} , elle n'est pas non plus affectée par la densité de matière ρ (module d'Young constant).

Minimiser la compliance étant, dans cette étude, l'objectif de l'optimisation topologique par la méthode SIMP, nos résultats mettent principalement l'accent sur les valeurs de cette dernière. Compte tenu de la distinction entre les trois compliances qui vient d'être faite et comme nous le verrons par la suite dans cette même sous-section, il paraît légitime de comparer la compliance du modèle converti plutôt avec la compliance effective que la compliance globale. Aussi, la distribution des contraintes étant l'un des principaux paramètres observés lors de la conception de pièces et structures, la répartition des contraintes dans les poutres construites est également présentée.

4.5.4.1 Résultats avec le raccordement par nœuds

Les Figure 4-27 et Figure 4-28a présentent respectivement les répartitions de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*) et la norme du vecteur déplacement (en *mm*) obtenues après l'étude multidimensionnelle pour le raccordement par nœuds. Il apparaît sur la figure que le déplacement maximal se situe en milieu (dans le sens longitudinal) de travée et que l'énergie maximale est retrouvée dans les poutres transversales. La Figure 4-28b illustre la forme de la déformée où un facteur de 2000 a été appliqué.

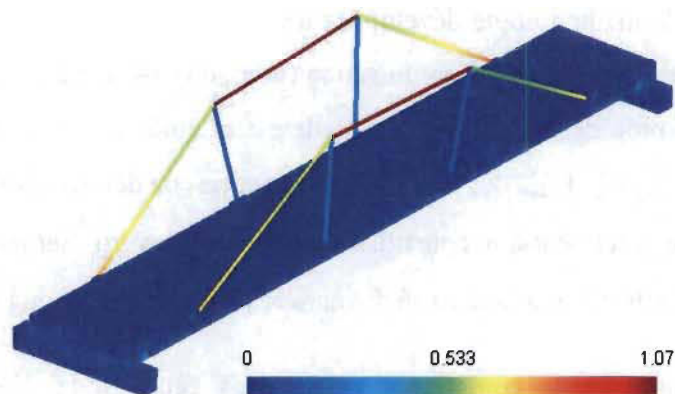


Figure 4-27 : Répartition de l'énergie de déformation par élément 1D et 3D avec raccordement par nœuds (Figure 4-24).

Le déplacement maximal observé est $\theta_1 = 0,55mm$; la valeur maximale de l'énergie de déformation apparaît dans la partie structurale et est $W_{cons1} = 1,07 \text{ Joules}$. La compliance du modèle converti dans ce cas est $C_{cons1} = 352 \text{ Joules}$.

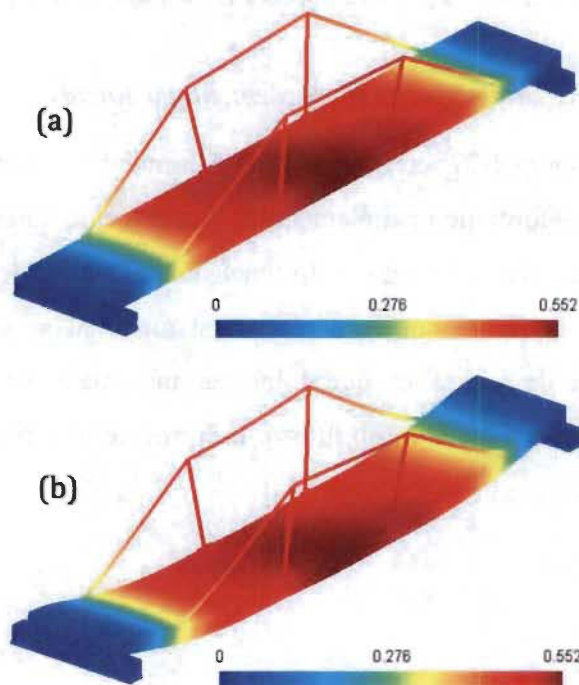


Figure 4-28 : (a) Norme du vecteur déplacement (en mm) et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) de la structure, avec raccordement par nœuds.

La Figure 4-29 met en évidence la répartition des contraintes signées minimale et maximale σ_x dans les poutres. Pour chaque élément de poutre cette contrainte cumule les contributions de l'effort normal suivant l'axe de la poutre ou encore axe X et des moments de flexion dans les deux autres axes Y et Z . La contrainte semble maximale dans les poutres transversales, au niveau des points de jonction.

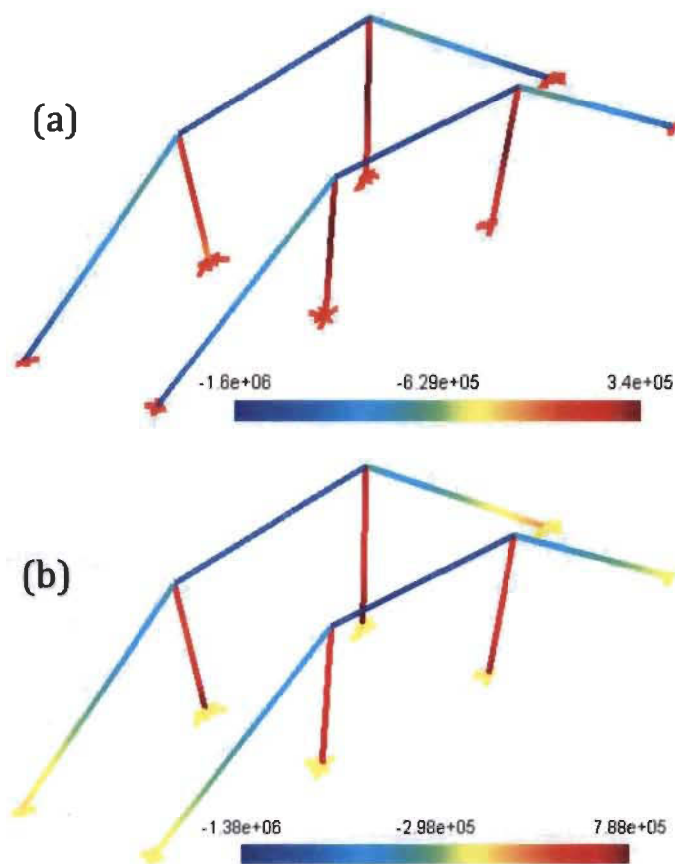


Figure 4-29 : Répartition des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres avec raccordement par nœuds.

La Figure 4-30 présente les contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz} . Toutes ces contraintes sont calculées dans le repère local de la poutre. La contrainte maximale en valeur absolue est $|\sigma_{x1}| = 1,600 \text{ MPa}$. On observe que cette contrainte, qui tient compte

à la fois des contraintes en flexion et axiales, est la plus dominante, comparativement aux contraintes de cisaillement dont la valeur maximale est $|\tau_{xy1}| = 0,020 \text{ MPa}$.

La Figure 4-31 illustre la répartition de la contrainte de Von Mises σ_{VMIS1} dans la partie volumique. On note que la contrainte maximale obtenue est $\sigma_{VMIS1} = 2,200 \text{ MPa}$ et qu'elle apparaît autour du raccord 1D-3D proche de la culée.

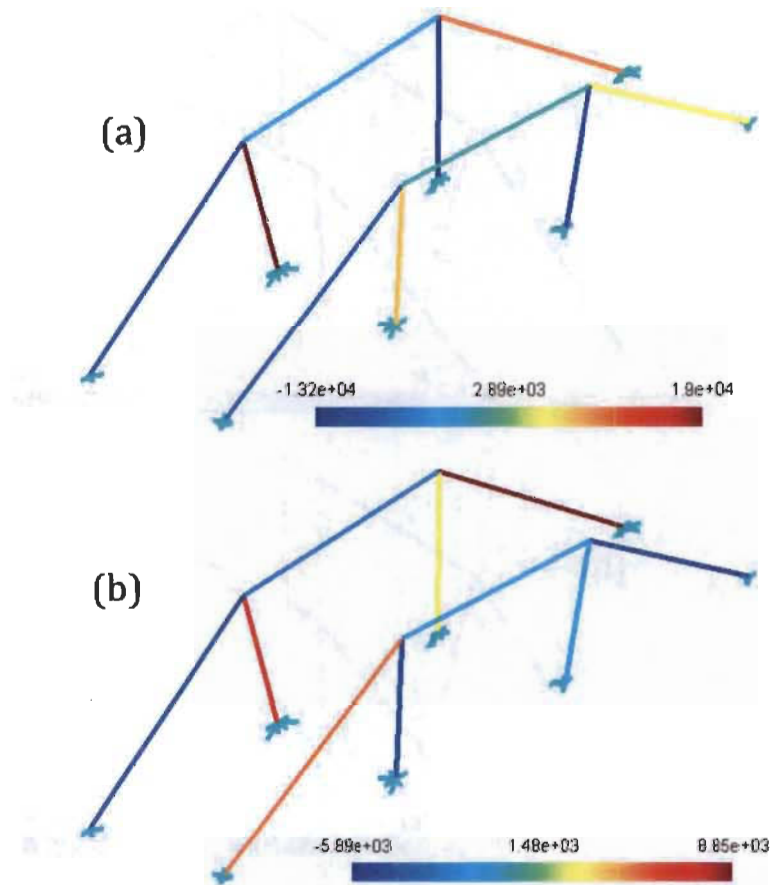


Figure 4-30 : Répartition des contraintes de cisaillement (a) τ_{xy} et (b) τ_{xz} dans les poutres avec raccordement par nœuds.

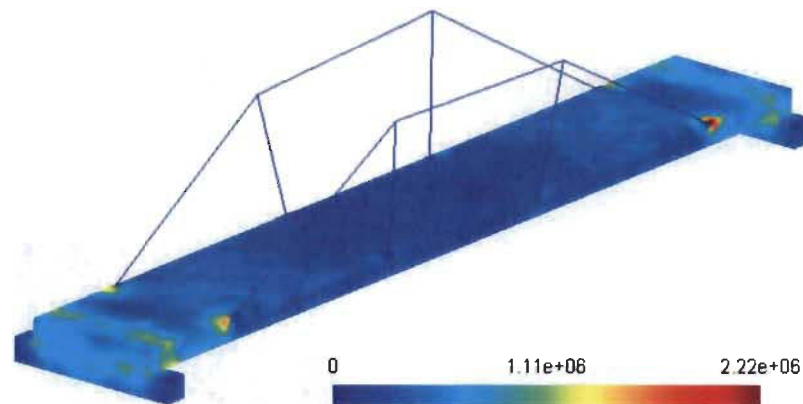


Figure 4-31 : Répartition de la contrainte de Von Mises dans le volume avec raccordement par nœuds.

4.5.4.2 Résultats avec le raccordement par triangles

Les Figure 4-32 et Figure 4-33a présentent respectivement les répartitions de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*) et la norme du vecteur déplacement (en *mm*) obtenues après l'étude multidimensionnelle pour le raccordement par triangles. La Figure 4-33b illustre la forme de la déformée où un facteur de 2000 a été appliqué.

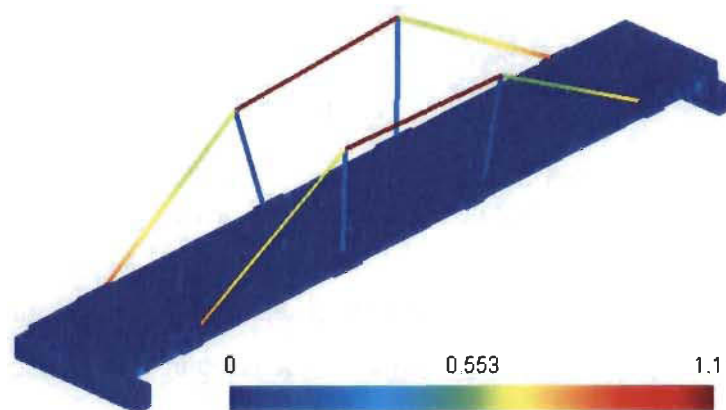


Figure 4-32 : Répartition de l'énergie de déformation par élément 1D et 3D avec raccordement par triangles (Figure 4-25).

Dans ce cas, le déplacement maximal observé est $\theta_2 = 0,52mm$ et la valeur maximale de l'énergie de déformation est $W_{cons2} = 1,11 \text{ Joules}$. La compliance du modèle converti que l'on en déduit est $C_{cons2} = 335 \text{ Joules}$.

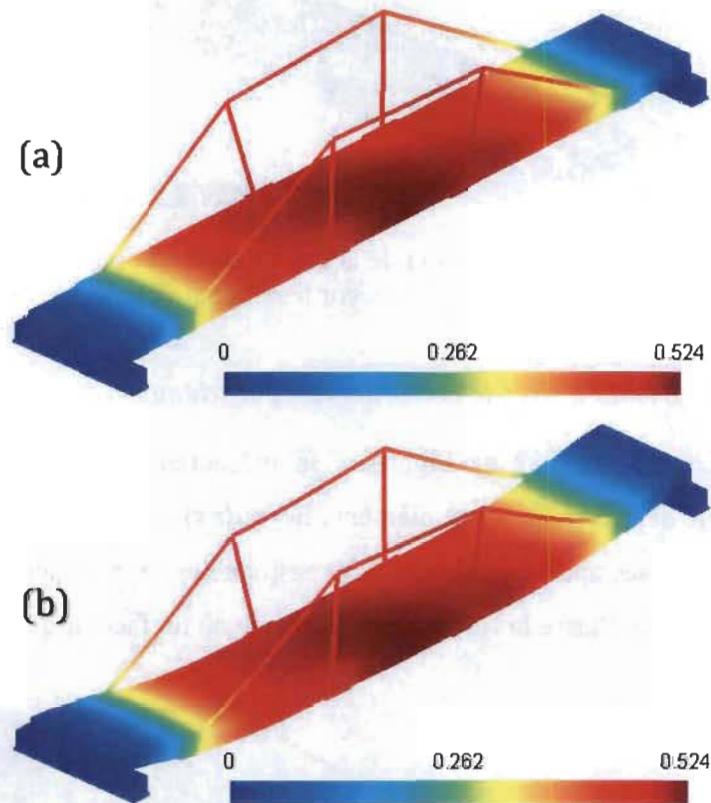


Figure 4-33 : (a) Norme du vecteur déplacement (en mm) et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) de la structure avec raccordement par triangles.

La Figure 4-34 met en lumière la répartition des contraintes signées minimale et maximale σ_x dans les poutres. Pour chaque élément de poutre, cette contrainte cumule la contrainte axiale et les contraintes de flexion.

La Figure 4-35 présente les contraintes de cisaillement τ_{xy} et τ_{xz} . Toutes ces contraintes sont calculées dans le repère local de la poutre. La contrainte maximale en valeur absolue est $|\sigma_{x2}| = 1,620 \text{ MPa}$. Elle apparaît dans les poutres transversales, au

niveau des jonctions. Dans ce cas également, cette contrainte est plus dominante, comparativement à la contrainte de cisaillement maximale qui est $|\tau_{xy2}| = 0,024 \text{ MPa}$.

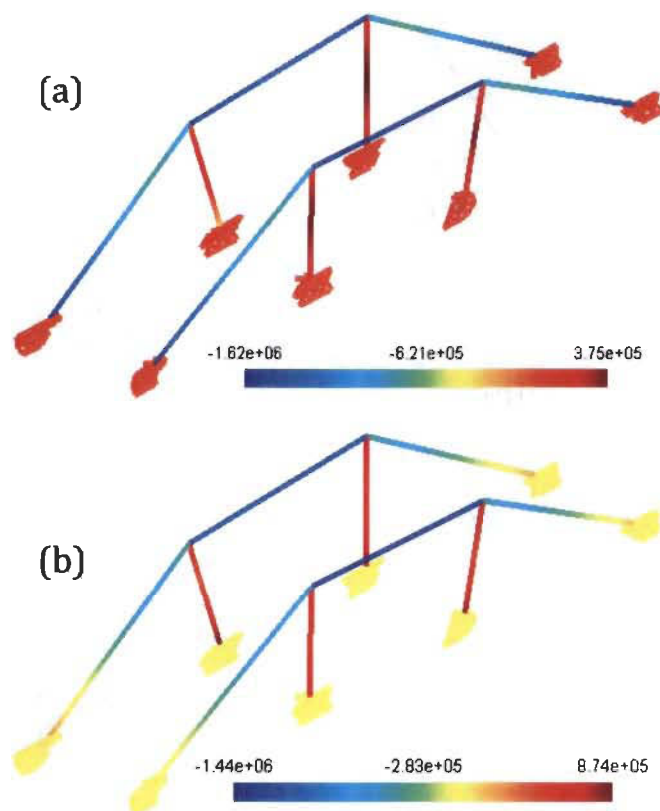


Figure 4-34 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres avec raccordement par triangles.

Comme dans le cas du raccordement par nœuds, la Figure 4-36 présente la répartition de la contrainte de Von Mises σ_{VMIS2} dans la partie volumique. On note que la contrainte maximale est $\sigma_{VMIS2} = 1,850 \text{ MPa}$ qui est très comparable à la contrainte maximale dans les poutres $|\sigma_{x2}| = 1,620 \text{ MPa}$, et que la zone la plus sollicitée se trouve sous le tablier, au niveau de la zone de contact entre le tablier et la culée. Les efforts ne sont donc pas transmis de la même façon pour les deux types de raccords (voir Figure 4-31 et Figure 4-36), et la contrainte est plus élevée lors du raccordement par nœuds.

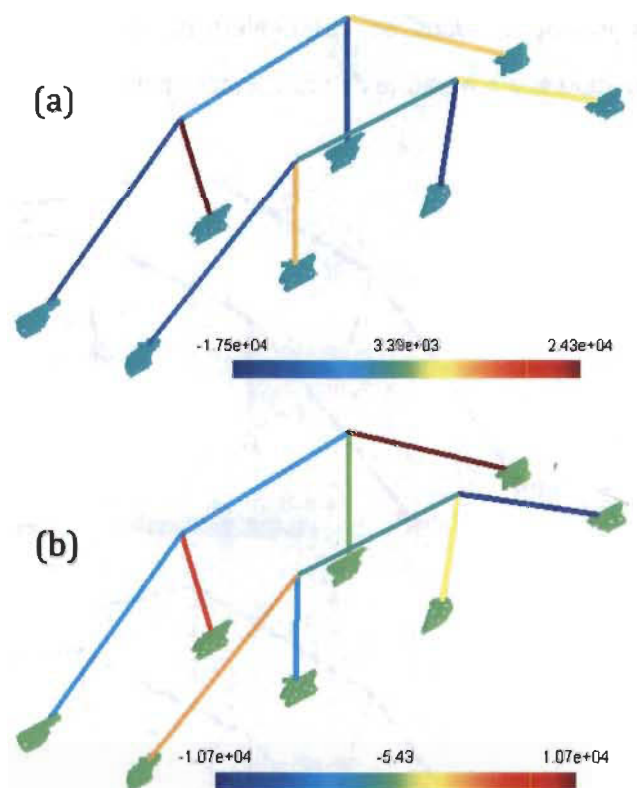


Figure 4-35 : Répartition des contraintes de cisaillement (a) τ_{xy} et (b) τ_{xz} dans les poutres avec raccordement par triangles.

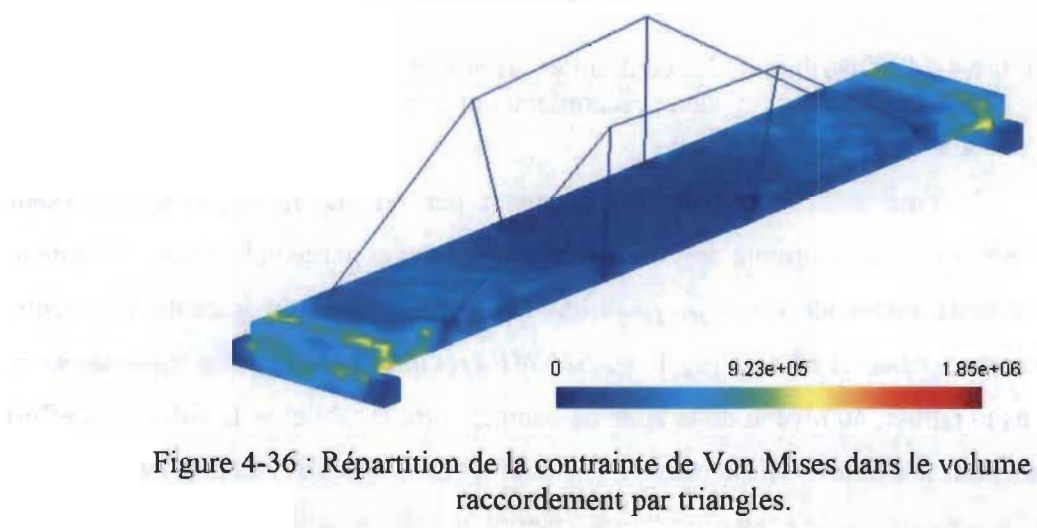


Figure 4-36 : Répartition de la contrainte de Von Mises dans le volume avec raccordement par triangles.

4.6 Récapitulatif des résultats

Dans le Tableau 4-1 est consigné un récapitulatif des caractéristiques du squelette et les valeurs des différents volumes et compliances. On constate une perte de volume entre le modèle converti ($V_{cons} = 18,08 \text{ m}^3$) et le modèle optimisé adapté ($V_{objectif} = 19,50 \text{ m}^3$). Moins de volume équivaut à moins de matière, et donc à une augmentation de la compliance (ou diminution de la rigidité).

Tableau 4-1 : Récapitulatif des résultats du modèle avant et après conversion.

	Caractéristiques du squelette	
Nombre de points de jonction	4	
Nombre de points d'extrémité	8	
Nombre de segments (avant normalisation)	127	
Nombre total de poutres droites	10	
	Volume optimisé (<i>non-design exclu</i>) (m^3)	
Volume total initial : V_d	390,60	
Volume objectif : $V_{objectif}$	19,50	
Volume après lissage : V_{lisse}	19,05	
Volume construit : V_{cons}	18,03	
Rapport $V_{cons}/V_{objectif}$	92 %	
	Compliance de la structure (<i>Joules</i>)	
	Raccord par nœuds (49 mini-poutres)	Raccord par triangles (241 mini-poutres)
Compliance effective après AEF 3D : C_{eff}	292 J	292 J
Compliance après AEF 1D-3D : C_{cons}	352 J	335 J
Ratio C_{cons}/C_{eff}	121 %	115 %
	Contrainte (<i>MPa</i>)	
Contrainte maximale $ \sigma_x $	1,600	1,620
Contrainte tangentielle $ \tau_{xy} $	0,020	0,024
Contrainte de Von Mises volume $ \sigma_{VMIS} $	2,220	1,850

Les résultats de ce tableau révèlent aussi que les contraintes tangentielles peuvent être négligées devant la contrainte maximale. Cette dernière tient compte des contributions de l'effort normal suivant l'axe de la poutre : $\sigma_N = N/A$ et des moments de flexion suivant Y : $\sigma_{MFy} = z \cdot M_{Fy}/I_y$ et Z : $\sigma_{MFz} = -y \cdot M_{Fz}/I_z$, avec pour chaque poutre considérée, $y = z =$ rayon de la section de la poutre [135]. Dans cet exemple, la contribution de l'effort normal est la plus significative comparée à celle des moments de flexion. On obtient en l'occurrence les valeurs maximales suivantes dans le cas du raccordement par triangles : $|\sigma_N| = 1,50 \text{ MPa}$, $|\sigma_{MFy}| = 0,66 \text{ MPa}$ et $|\sigma_{MFz}| = 0,85 \text{ MPa}$, comme le montre la Figure 4-37.

En outre, relevons que la distribution des contraintes fournit au concepteur une autre possibilité de validation, notamment au regard d'une contrainte maximale admissible.

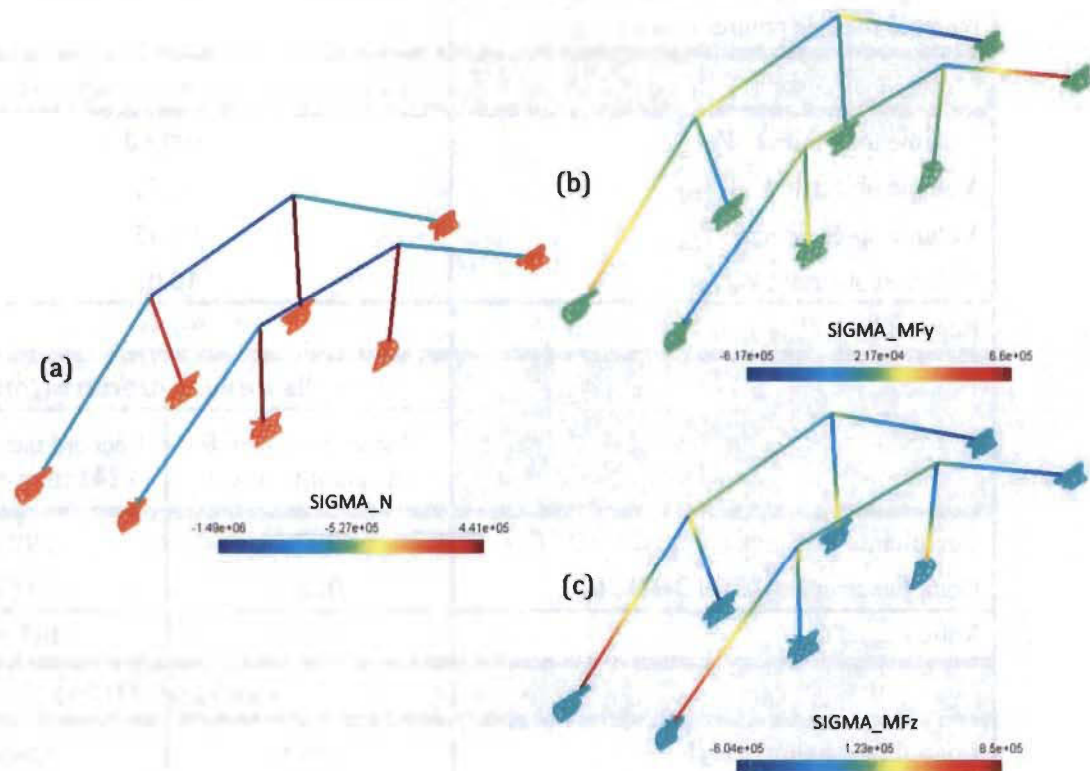


Figure 4-37 : Répartition des contraintes (a) normale et (b), (c) de flexion dans les poutres avec raccordement par triangles.

Les compliances construites sont $C_{cons1} = 352 \text{ Joules}$ et $C_{cons2} = 335 \text{ Joules}$, respectivement après raccordement par nœuds et par triangles. De l'un à l'autre, l'on constate que la compliance du modèle converti est plus faible lors du raccordement par triangles. Ceci paraît logique, à cause de la nature même du raccord qui est avec un seul nœud (ajout d'environ 5 mini-poutres par zone de raccord) d'un côté, contre les nœuds de plusieurs triangles (ajout d'environ 30 mini-poutres par zone de raccord) de l'autre côté. De plus, en observant ces compliances par rapport à la compliance globale $\tilde{C} = 452 \text{ Joules}$, on aurait l'impression que le modèle converti serait plus rigide que le modèle optimisé adapté, alors que la réalité est tout autre. En effet, comme évoqué au début de cette sous-section, la compliance globale à la fin de l'optimisation topologique est affectée par la densité de matière ρ . Le module d'Young et par conséquent la rigidité de la structure sont également influencés par la densité de matière, alors que de son côté, l'analyse par éléments finis du modèle converti est effectuée en utilisant un module d'Young constant. Ainsi, cette compliance globale est une valeur artificielle qui n'a pas de sens physique. C'est pour cette raison qu'une analyse par éléments finis 3D du modèle optimisé adapté, en utilisant cette fois un module d'Young constant, a été effectuée.

La Figure 4-38 renseigne sur la répartition de l'énergie de déformation par élément du modèle optimisé adapté après une analyse par éléments finis 3D avec uniquement des éléments tétraédriques, en utilisant un module d'Young constant ($E = 69 \text{ GPa}$, égal au module d'Young du matériau initial) et les mêmes conditions mécaniques que le problème initial (voir sous-section 3.3.1). Ce modèle est utilisé pour valider la structure convertie en assemblage de poutres. La compliance effective obtenue à partir de cette énergie de déformation est $C_{eff} = 292 \text{ Joules}$. La différence entre les compliances construites C_{cons1} et C_{cons2} et celle effective est manifeste, et établit qu'en réalité, le modèle converti sous forme d'une structure de poutres droites est plus flexible que le modèle optimisé adapté, sans toutefois l'altérer.

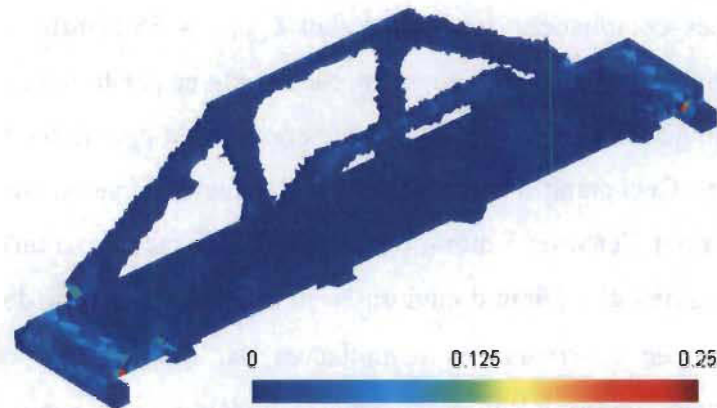


Figure 4-38 : Répartition de l'énergie de déformation dans les éléments du modèle optimisé adapté après AEF 3D de ce dernier.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthodologie de transformation automatique en modèles CAO des résultats d'optimisation topologique lorsque ces derniers tendent vers des structures composées de poutres a été présentée. Le processus global commence par la conversion du modèle optimisé adapté en une structure constituée de poutres cylindriques. Durant ce processus, la partie de *non-design* demeure intacte. Le modèle converti est ensuite validé par une étude multidimensionnelle. Après application sur un exemple illustratif (voir Figure 4-39), plus de 90 % du volume objectif et 115 % de la compliance effective ont été retrouvés. Le modèle CAO obtenu de cette façon est une bonne approximation du modèle optimisé, mais sous une forme facilement manipulable et fabricable, contrairement à l'enveloppe irrégulière de la forme optimisée.

L'écart constaté entre les compliances des modèles converti et optimisé adapté est une des faiblesses de la présente approche. Ajouté à celle-ci le fait que le modèle CAO résultant ne soit pas symétrique, bien que le problème initial le soit. En terminant, la méthodologie proposée utilise les méthodes de lissage et de squelettisation conçues, pour la plupart, dans des contextes différents de l'optimisation topologique. Ladite méthodologie va maintenant être testée sur différentes structures dans le chapitre suivant.

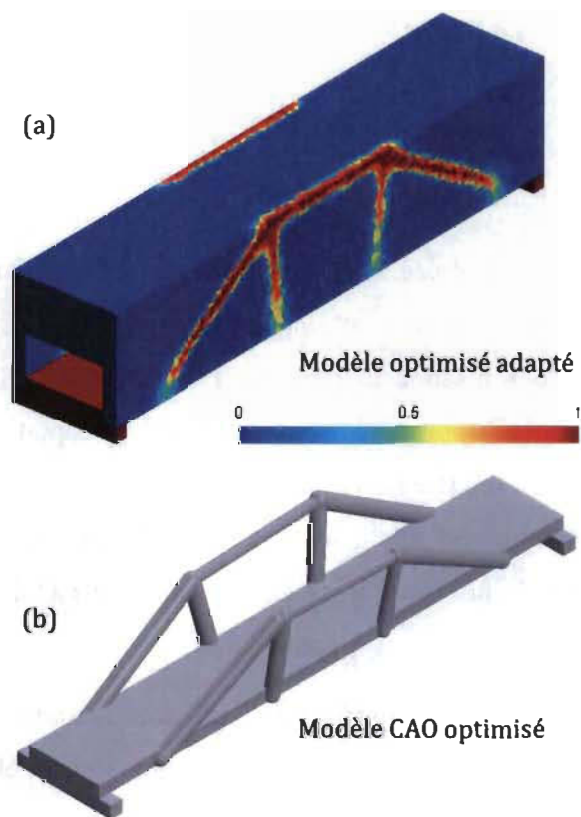


Figure 4-39 : Illustration (a) du résultat de l'optimisation par la méthode SIMP adaptative et (b) du modèle CAO converti.

CHAPITRE 5 RÉSULTATS ET DISCUSSION

5.1 Introduction

Les chapitres précédents ont présenté de manière détaillée la méthodologie développée pour interpréter automatiquement en modèles CAO les formes optimisées solutions de l'optimisation topologique par la méthode SIMP. À l'aide d'un exemple illustratif, l'approche proposée, qui comprend l'adaptation du modèle optimisé et la transformation en modèle CAO du résultat découlant, a été présentée. Dans ce chapitre, cette méthodologie est appliquée à l'interprétation de différentes structures afin de démontrer sa validité. Cette mise en évidence s'effectue en utilisant des modèles 3D réalistes en guise d'exemples d'application.

Le module d'Young et le coefficient de Poisson du matériau utilisé sont respectivement $E = 69 \text{ GPa}$ et $\nu = 0,3$ pour tous les exemples. Puisqu'elles sont les plus dominantes, uniquement les contraintes minimale et maximale sont présentées pour chacun des exemples. La connexion 1D-3D est effectuée à l'aide du raccordement par triangles. Trois modèles sont présentés dans cette partie. Le premier est un support en forme de L, le second est un modèle de pont sur une rivière et le troisième est un modèle en forme de chaise.

5.2 Description de l'environnement de développement

Comme mentionné dans l'introduction de cette thèse, ce travail s'inscrit dans la suite de plusieurs années de recherche effectuée par l'Équipe de Recherche en Intégration CAO-Calcul (ÉRICCA) de l'UQTR. Au cours de ces années, un environnement de travail orienté objet et basé sur un Modèle de Topologie Unifié (MTU) [13] a été développé. En l'occurrence, il contient un Mailleur Automatique de Géométries issues de la CAO (MAGiC), permet de faire des calculs notamment en élasticité linéaire et en thermique, est évolutif, modulable et capable d'intégrer de nouveaux développements en fonction des

besoins de l'utilisateur. C'est dans cet environnement que la présente recherche a été effectuée. Open CASCADE Technology [136] qui est une plateforme libre de développement en CAO et en modélisation 3D, est utilisé pour importer les modèles CAO dans le MTU. Les calculs par éléments finis sont effectués en utilisant les bibliothèques du logiciel libre Code Aster [135]. La visualisation de nos résultats, et donc de toutes les images présentées dans ce travail, est effectuée à l'aide du logiciel libre GMSH, qui offre plusieurs options de pré- et de post traitement [137].

5.3 Cas d'étude 1 : Support en forme de L

Le premier cas d'étude présenté est un support en forme de L. La Figure 5-1 révèle le modèle de support en forme de L. Elle présente sur la Figure 5-1a, les conditions aux limites et le chargement appliqués. Comme la figure le montre, la force par unité de surface appliquée dans la direction Y est de 10kN/m^2 . Les dimensions globales du modèle sont de $2,2\text{m} \times 2\text{m} \times 1\text{m}$.

5.3.1 Résultats de la méthode SIMP adaptative

La Figure 5-1b donne la définition des sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge). La partie en bleu est la zone qui sera optimisée et la partie en rouge est la zone qui demeurera intacte durant tout le processus d'optimisation et de transformation du modèle CAO découlant de l'optimisation adaptative.

Les paramètres de la méthode SIMP adaptative sont regroupés dans le Tableau 5-1. La taille du maillage uniforme initial est $d_g = 40\text{ mm}$ et le critère de convergence initial est $\Delta = 1\%$.

La Figure 5-2 illustre les résultats obtenus sous forme de répartition optimale de la densité de matière dans le sous-domaine de *design*. Elle présente également les maillages utilisés pour chacune des optimisations par la méthode SIMP. Les résultats sur les tailles minimales et maximales, la qualité du maillage, la différence entre la prescription et la

réalisation, ainsi que les résultats de l'optimisation par la méthode SIMP adaptative sont regroupés dans le Tableau 5-2.

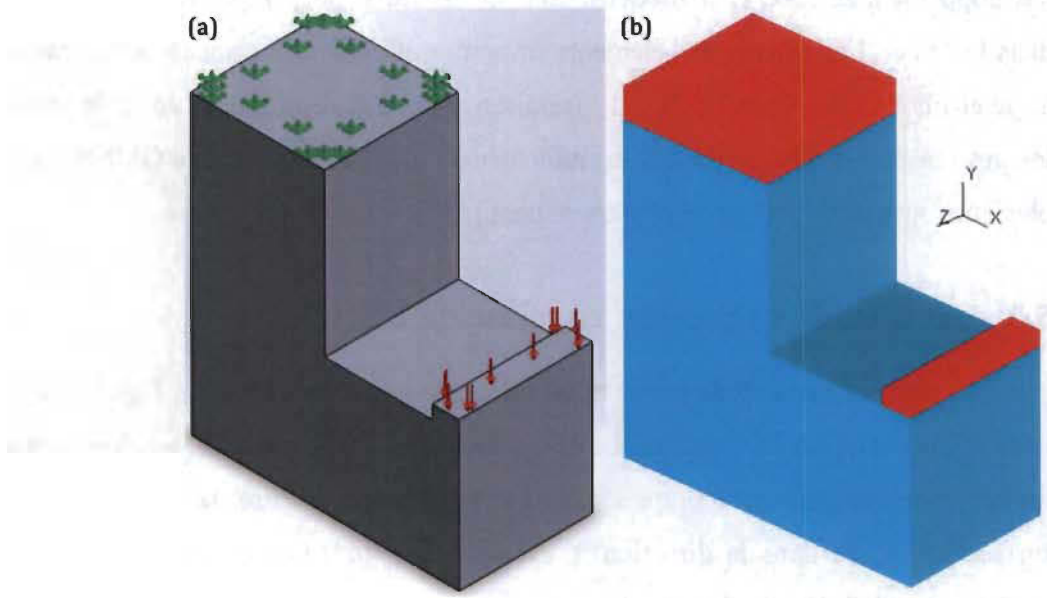


Figure 5-1 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge).

Tableau 5-1 : Exemple 1 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille (écart nodal) du maillage uniforme initial	40 mm
f	Fraction volumique	3 %
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	60 mm
χ	Paramètre de raffinement	2
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	2

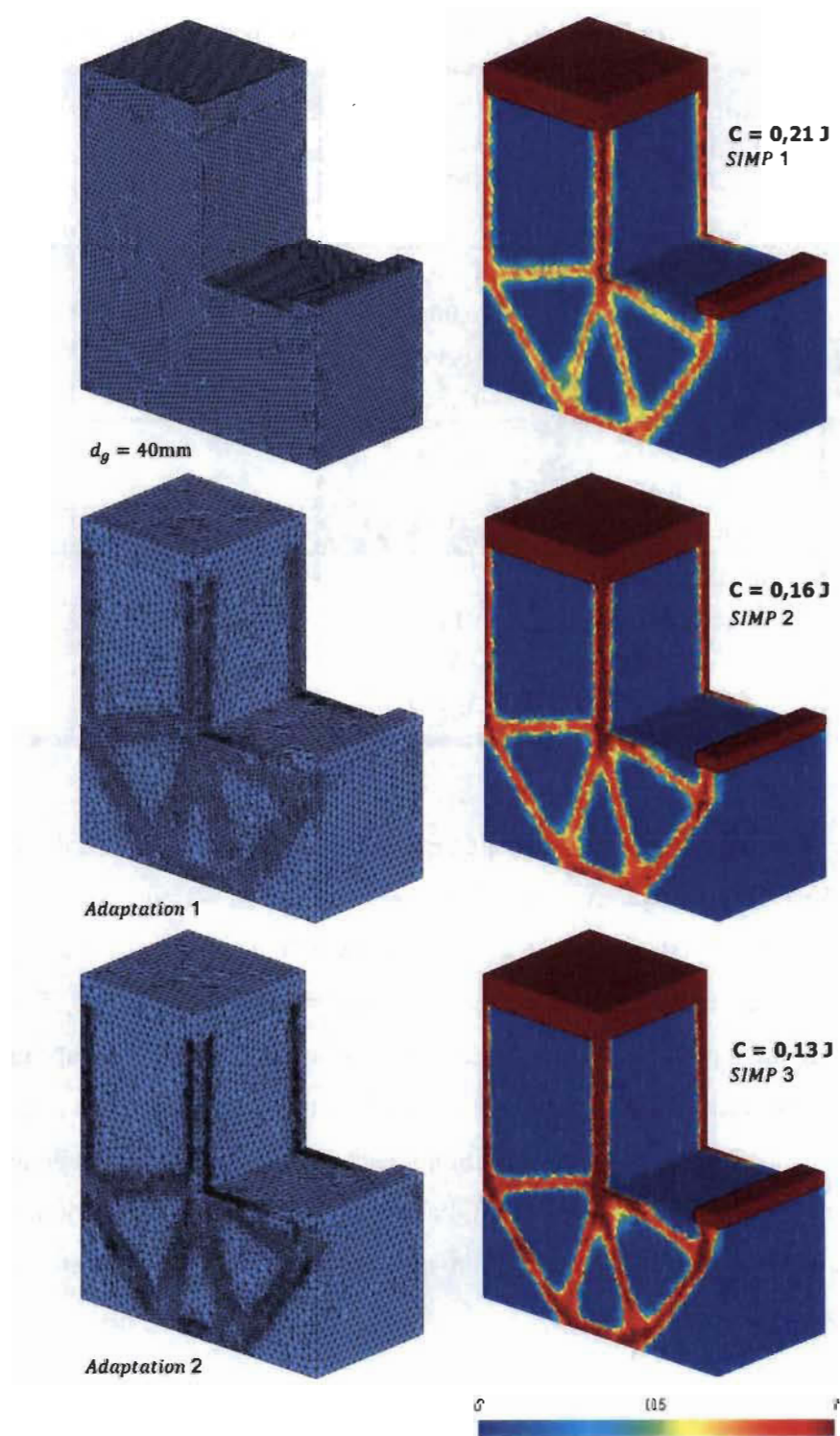


Figure 5-2 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations.

Tableau 5-2 : Exemple 1 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.

		Maillage initial	Adaptation1	Adaptation2
Maillage	Prescription	426 916	174 040	221 685
	Réel	345 441	145 349	182 260
	Erreur respect carte	19,08 %	16,50 %	17,80 %
Qualité (%)	$Q_e \leq 0,1$	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	0,00 %	0,01 %	0,03 %
	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	18,44 %	24,14 %	26,01 %
	$Q_e > 0,5$	81,56 %	75,85 %	73,96 %
Tailles	Taille min		19 mm	7 mm
	Taille max		60 mm	60 mm
	Rapport taille		0,32	0,12
Optimisation	Nb. d'itérations	30	21	21
	Temps opt.	91 min	20 min	15 min
	Convergence	1 %	0,5 %	0,25 %
	Compliance	0,21 J	0,16 J	0,13 J

Les répartitions de la densité de matière à la fin du processus d'optimisation par la méthode SIMP adaptative sont illustrées sur la Figure 5-3 pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction. On a respectivement de haut en bas sur la figure : $\rho_{seuil} = 0$ (donc aucun seuillage), $\rho_{seuil} = 0,25$, $\rho_{seuil} = 0,50$ et $\rho_{seuil} = 0,75$. Ces répartitions sont données pour les résultats de la 1^{re} optimisation (SIMP 1, maillage uniforme) et de la 3^e optimisation (SIMP 3, après la 2^e adaptation). L'on observe une perte de continuité dans la solution de la 1^{re} optimisation lorsque la densité seuil d'extraction $\rho_{seuil} > 0,60$ (voir exemple pour $\rho_{seuil} = 0,75$). Par contre, cette même observation ne s'applique pas pour le résultat de la 3^e optimisation, notamment à cause de l'adaptation du maillage.

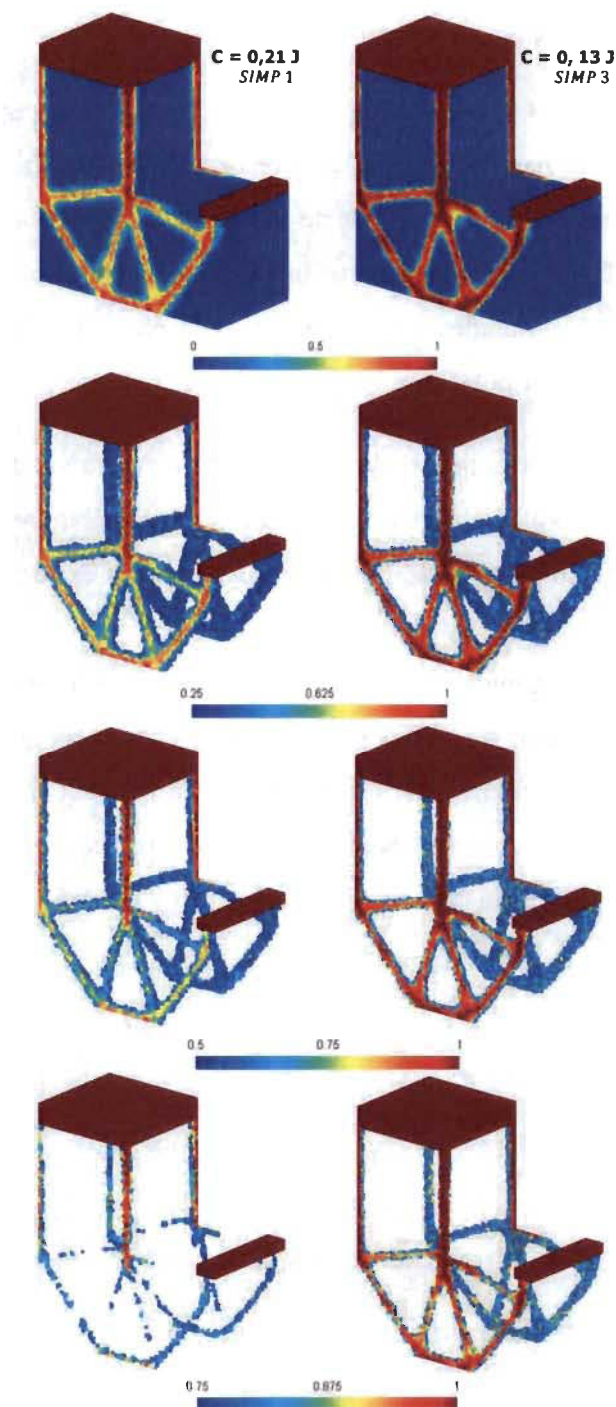


Figure 5-3 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.

5.3.2 Résultats de la conversion

La Figure 5-4 présente deux images qui représentent respectivement l'enveloppe du modèle après lissage (Figure 5-4a) et le résultat de la squelettisation sous forme de courbe-squelette (Figure 5-4b). La valeur de la densité d'extraction utilisée lors du lissage est $\rho_{seuil} \geq 0,30$. La partie en vert sur la Figure 5-4a est la partie qui sera utilisée pour le raccordement par triangles, comme le montre le détail A1 illustré sur la Figure 5-6 lors de la création des mini-poutres.

La Figure 5-5 met en évidence la répartition du rayon des sections transversales (en m) de chaque poutre avant (Figure 5-5a) et après (Figure 5-5b) la normalisation. Le squelette final possède 23 poutres droites, 6 points d'extrémité et 13 points de jonction. Le rayon maximal obtenu est $43,5mm$.

On remarque rapidement le manque de symétrie dans le résultat, notamment à cause du squelette qui est mal défini aux jonctions. C'est pour cela que, si on considère le modèle de la Figure 5-5b comme 2 parties distinctes en forme de L, on n'aura pas le même nombre de poutres pour chacune de ces parties. En l'occurrence, on a 10 poutres pour l'une et 12 poutres pour l'autre partie.

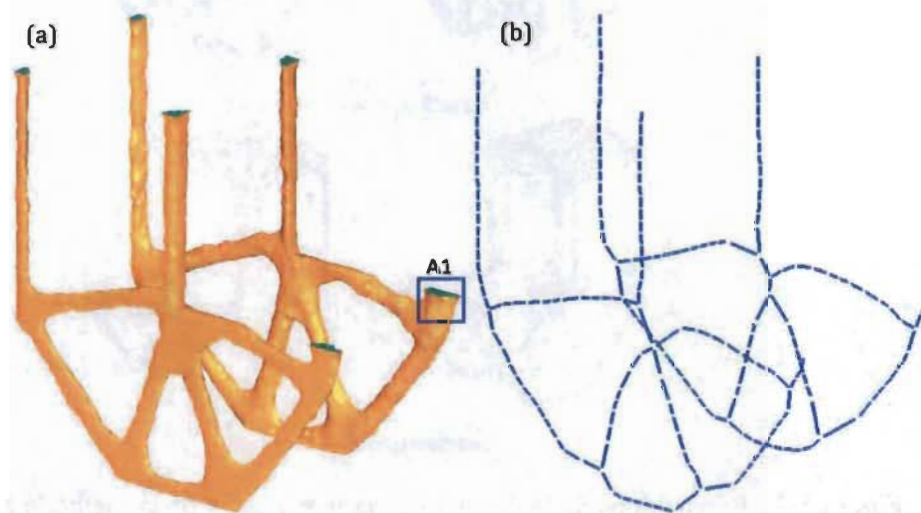


Figure 5-4 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.

La Figure 5-6 fait ressortir le raccordement par triangles avec les mini-poutres, avec une présentation détaillée des mini-poutres à l'un des raccords. Une illustration du détail A1 (Figure 5-4) est également présentée. On constate que les mini-poutres ont effectivement été introduites uniquement sur les segments de l'interface dont les deux triangles appartiennent à la fois à la partie optimisée et à celle de *non-design*. Un total de 387 mini-poutres ont été introduites dans cet exemple.

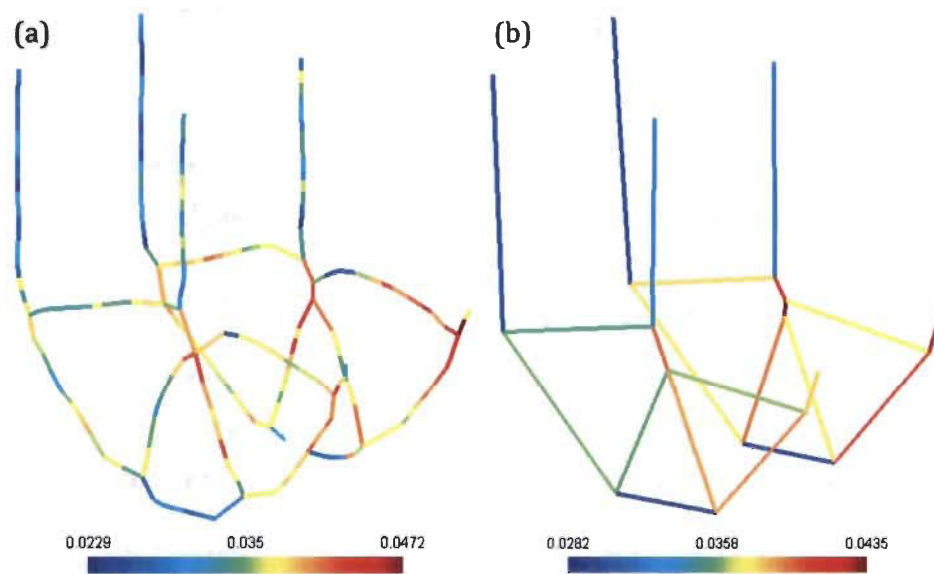


Figure 5-5 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).

La Figure 5-7 illustre le modèle maillé avec des éléments finis tétraèdres et poutres. Le maillage de la partie volumique est le même que celui utilisé lors de la SIMP adaptative. L'écart nodal du maillage des poutres est constant et égale à l'écart nodal moyen du maillage volumique. C'est ce maillage qui est utilisé lors de l'analyse multidimensionnelle par éléments finis.

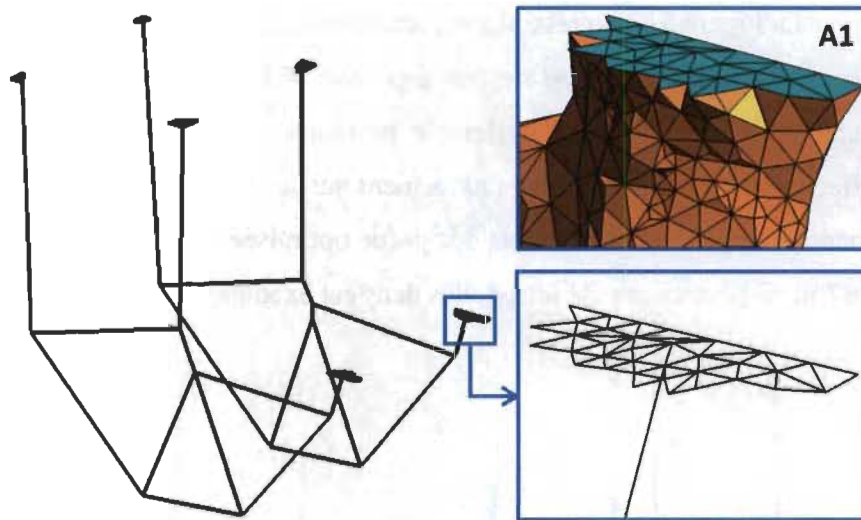


Figure 5-6 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.

La Figure 5-8 présente le résultat obtenu en ce qui concerne la répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*). Il apparaît sur cette figure que l'énergie de déformation maximale se distingue au niveau des poutres verticales proches de la zone de chargement notamment à cause d'un bras de levier plus court.

De manière analogue, la Figure 5-9a met en relief la norme du vecteur déplacement (en *mm*) et révèle que le déplacement a une valeur maximale d'environ $0,17\text{ mm}$. La Figure 5-9b dévoile l'allure de la structure déformée. Un facteur de 2000 a été appliqué au déplacement.

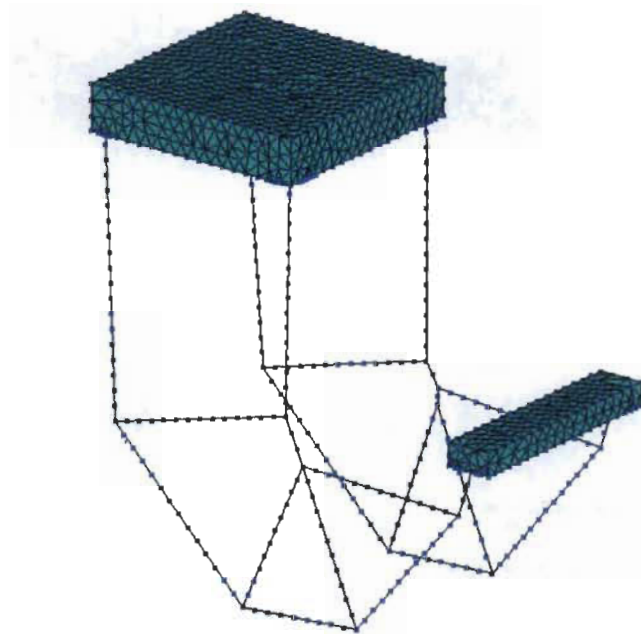


Figure 5-7 : Modèle 1D-3D maillé.

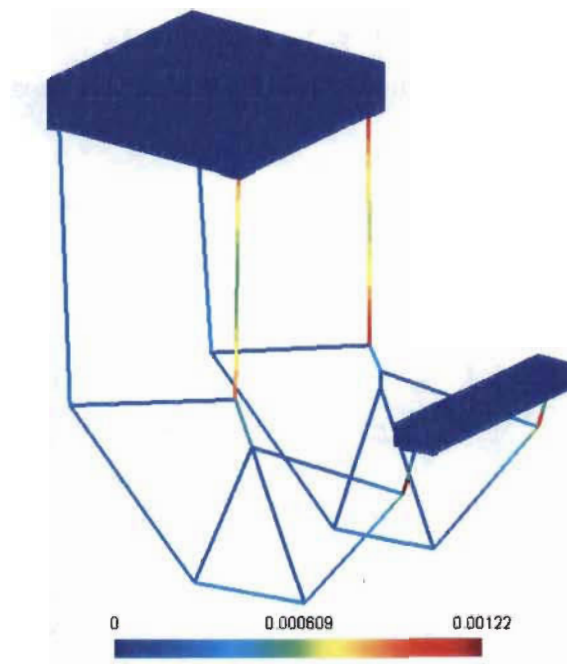


Figure 5-8 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*).

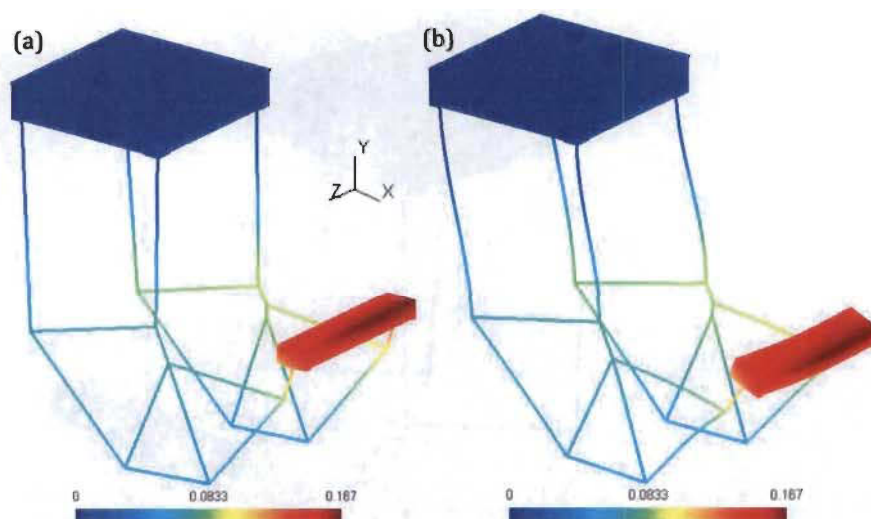


Figure 5-9 : (a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement $\times 2000$) (en mm).

La Figure 5-10 présente la répartition des contraintes signées minimale et maximale σ_x dans les poutres. Elles sont calculées dans le repère local de la poutre et cumulent les contraintes de flexion et axiale. La contrainte maximale est $|\sigma_x| = 1,880 \text{ MPa}$. Les poutres verticales proches de la zone de chargement apparaissent comme les zones les plus sollicitées.

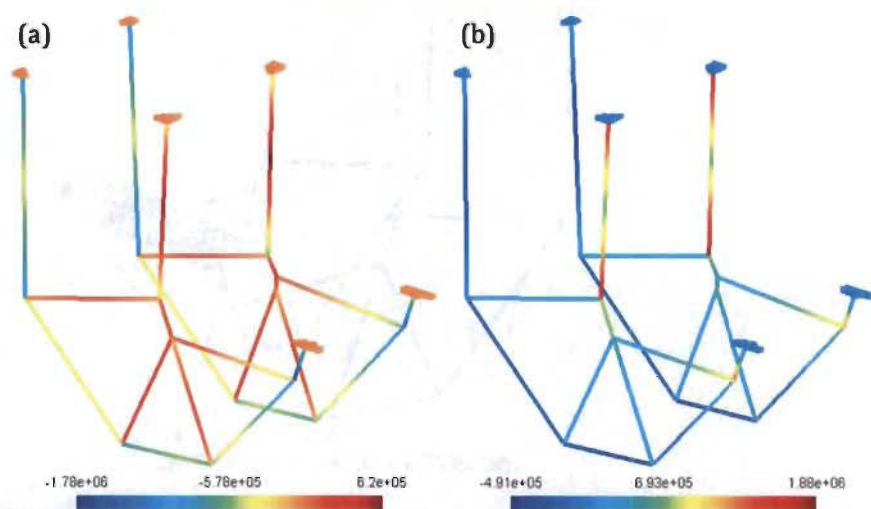


Figure 5-10 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.

Dans le Tableau 5-3 se retrouvent les résultats du modèle utilisé dans ce premier exemple. En d'autres termes, il contient les caractéristiques du squelette, les valeurs des volumes et les fractions volumiques obtenues, ainsi que les valeurs des compliances avant et après conversion.

Tableau 5-3 : Exemple 1 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.

Caractéristiques du squelette	
Nombre de points de jonction	13
Nombre de points d'extrémité	6
Nombre total de poutres droites	23
Nombre total de mini-poutres	387
Volumes	
Volume total de <i>design</i> initial : V_d	$3,000 \text{ m}^3$
Volume objectif : $V_{objectif}$	$0,090 \text{ m}^3$
Volume après lissage : V_{lisse}	$0,085 \text{ m}^3$
Volume construit : V_{rec}	$0,063 \text{ m}^3$
Fraction volumique	
Fraction volumique prescrite	3,00 %
Fraction volumique construite	2,13 %
Compliance de la structure	
Compliance effective après AEF 3D: C_{eff}	$0,075 \text{ J}$
Compliance après AEF 1D-3D: C_{cons}	$0,153 \text{ J}$
Contrainte dans la structure	
Contrainte maximale $ \sigma_x $	$1,880 \text{ MPa}$

5.3.3 Analyse des résultats

La forme optimisée obtenue concorde bien avec les résultats en 2D de [1, 138]. L'examen du Tableau 5-2, qui regroupe les résultats concernant l'optimisation adaptative, permet de valider que la compliance globale diminue à travers les adaptations. Cette observation est corroborée par la Figure 5-2 sur laquelle l'amélioration de la qualité de la

résolution de la solution optimisée entre la première et la dernière SIMP est manifeste. Le pourcentage d'éléments finis du maillage de qualité supérieure à 0,5 varie autour de 80 %, mais diminue d'une adaptation à l'autre. Ceci est causé par la gradation de la taille des éléments qui passe d'une taille constante de 40mm à des rapports de taille de 0,32 et 0,12 (soit environ 1/8). Le temps d'optimisation quant à lui dépend du nombre de nœuds du maillage et du nombre d'itérations avant la convergence. Lors de la première SIMP, le maillage est uniforme, comporte environ 350 000 tétraèdres et le processus d'optimisation converge après 30 itérations. Pour chacune des deux SIMP suivantes, seulement la moitié des éléments est utilisée du fait de l'adaptation du maillage. La convergence du processus s'effectue dans ces cas après seulement 21 itérations et ce, malgré la diminution du critère de convergence. En effet, dans ces derniers cas, la taille variable des éléments et la disposition de ceux-ci suivant la répartition de densité ont davantage d'influence sur la solution que le nombre total d'éléments. Densifier (raffinement) et clairsemer (déraffinement) le maillage uniquement dans des zones précises bien délimitées ont permis d'affiner la solution optimisée. En temps d'optimisation, l'on est passé d'environ 1 *itération*/180 *secondes* lors de la 1^{re} SIMP à 1 *itération*/45 *secondes* lors de la 3^e SIMP. En appliquant la stratégie d'adaptation proposée, la compliance globale a été améliorée d'environ 40 %, passant de 0,21 J initialement à 0,13 J après les deux adaptations (voir Figure 5-3). Cependant, une perte d'environ 8% de la qualité des tétraèdres est à relever.

Similairement, le Tableau 5-3 contient les résultats du modèle CAO converti. Environ 70 % du volume a été retrouvé. Il s'avère aussi que le modèle converti est moins rigide que le modèle optimisé adapté et que le ratio C_{eff}/C_{cons} avoisine 0,5. L'un des phénomènes qui peuvent expliquer cette différence est l'écart de volume entre les deux modèles. Cet écart pourrait être diminué notamment par l'utilisation des poutres courbes, c'est-à-dire telles qu'extraites lors de la squelettisation, ainsi que les valeurs correspondantes des rayons (avant normalisation).

5.4 Cas d'étude 2 : Pont

Le second exemple étudié est celui d'un pont sur une rivière. La Figure 5-11 illustre le modèle initial et les conditions aux limites et de chargement de ce second cas. Les dimensions globales du modèle sont de $8,5m \times 6m \times 25m$. La force par unité de surface est appliquée dans la direction Y (Figure 5-11a) est de $100kN/m^2$.

5.4.1 Résultats de la méthode SIMP adaptative

La Figure 5-11b présente le résultat de la subdivision en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge). Ainsi, la partie en rouge, contenant notamment le tablier, ne sera pas influencée par tout le processus d'optimisation et de conversion, puisqu'il s'opérera exclusivement dans la partie en bleu.

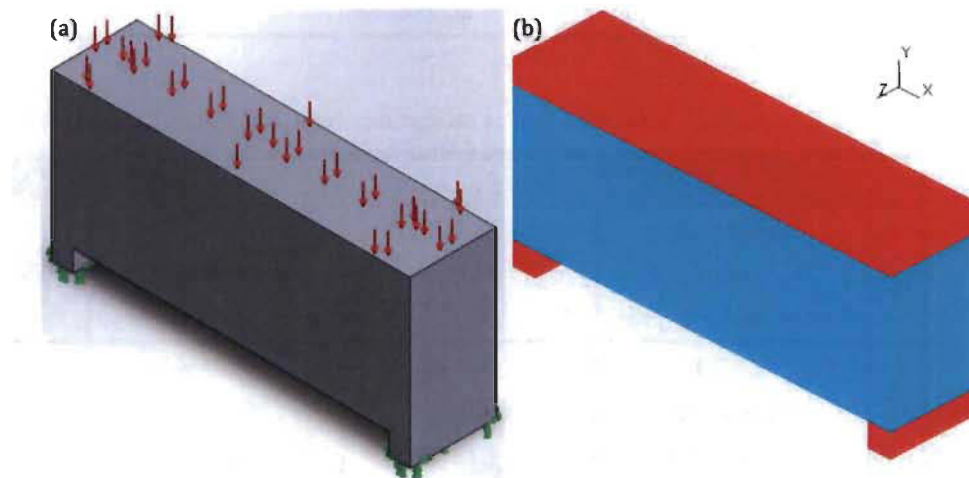


Figure 5-11 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge).

Le Tableau 5-4 renseigne sur les paramètres d'adaptation utilisés lors de l'optimisation topologique adaptative. Une fois de plus la fraction volumique est très faible et est de 2 % dans cet exemple.

La Figure 5-12 présente les répartitions optimales de la densité de matière dans le sous-domaine de *design*. Les maillages utilisés pour chacune des optimisations par la méthode SIMP y sont également présentés. Les résultats sur les tailles minimales et maximales, la qualité du maillage, ainsi que les résultats d'optimisation sont regroupés dans le Tableau 5-5.

Tableau 5-4 : Exemple 2 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille (écart nodal) du maillage uniforme initial	275 mm
f	Fraction volumique	2 %
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	350 mm
χ	Paramètre de raffinement	0,75
n_{Δ}	Nombre maximal d'adaptations	2

Tableau 5-5 : Exemple 2 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.

		Maillage initial	Adaptation1	Adaptation2
Maillage	Prescription	623 028	309 904	310 285
	Réel	493 863	250 883	250 079
	Erreur respect carte	20,73	19,04	19,40
Qualité (%)	$Q_e \leq 0,1$	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	0,00 %	0,01 %	0,01 %
	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	19,21 %	19,96 %	19,99 %
	$Q_e > 0,5$	80,78 %	80,02 %	80,00 %
Tailles	Taille min		230 mm	212 mm
	Taille max		350 mm	350 mm
	Rapport taille		0,66	0,60
Optimisation	Nb. d'itérations	38	35	40
	Temps opt.	3h 21min	54 min	60 min
	Convergence	2 %	0,8 %	0,32 %
	Compliance	55 677 J	51 079 J	49 492 J

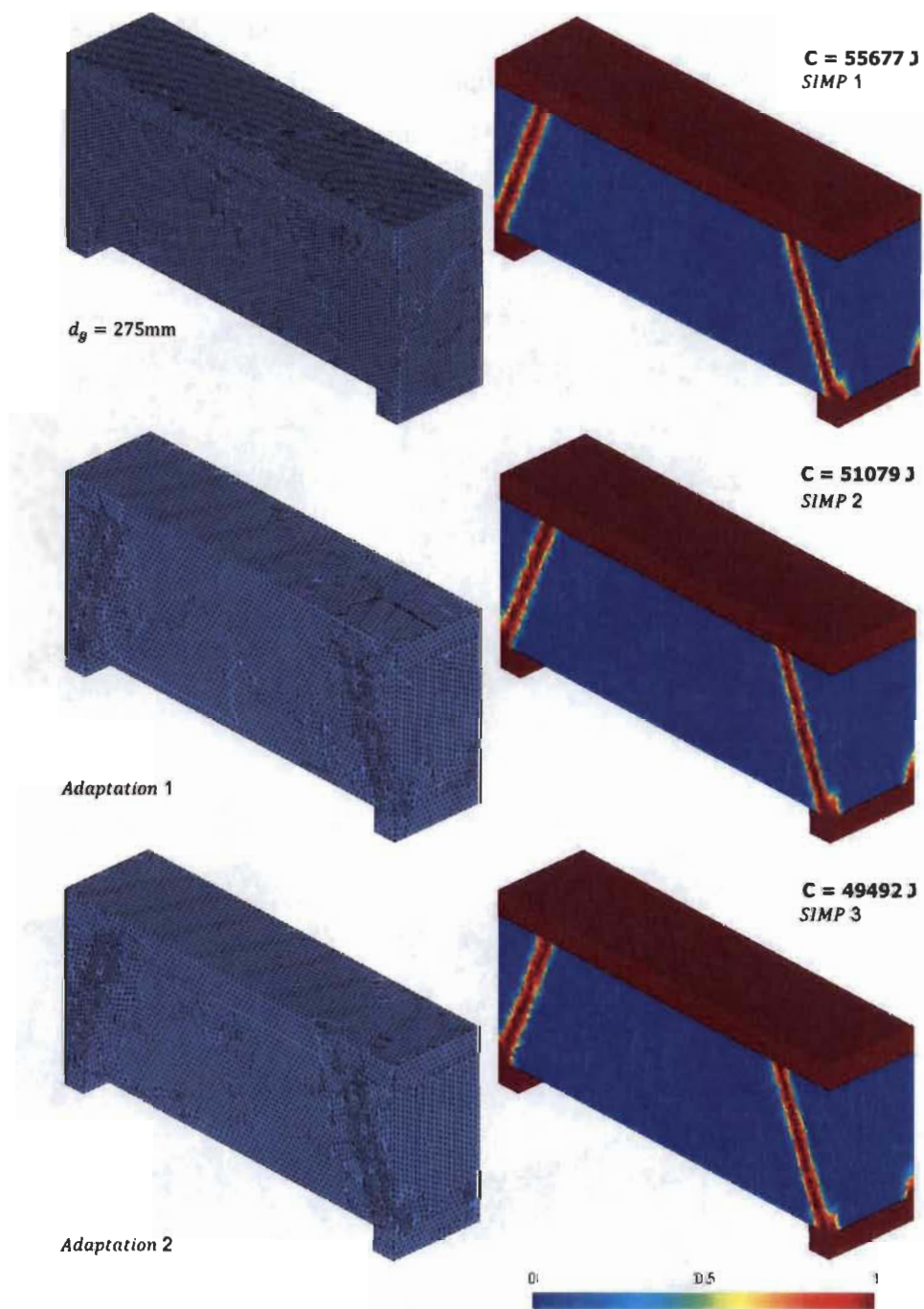


Figure 5-12 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations.

Les répartitions de la densité à la fin de la méthode SIMP adaptative sont illustrées sur la Figure 5-13 pour les 1^{re} et 3^e optimisations et ce, pour différentes valeurs de ρ_{seuil} . On a respectivement de haut vers le bas sur la figure : $\rho_{seuil} = 0$ (donc aucun seuillage), $\rho_{seuil} = 0,25$, $\rho_{seuil} = 0,50$ et $\rho_{seuil} = 0,75$. On s'aperçoit que les 2 distributions sont très ressemblantes.

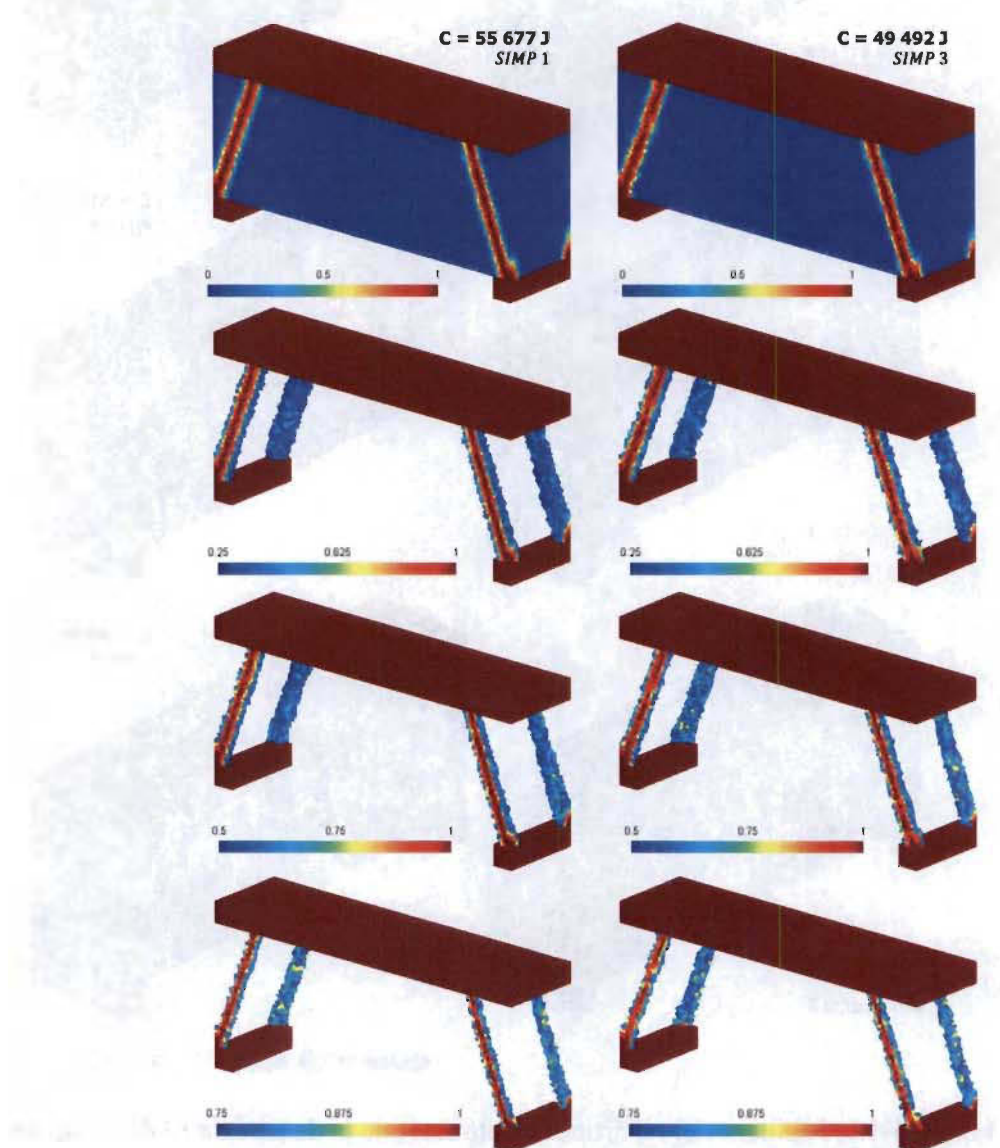


Figure 5-13 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.

5.4.2 Résultats de la conversion

La Figure 5-14 présente l'enveloppe du modèle après lissage (Figure 5-14a) et la courbe-squelette (Figure 5-14b). La valeur de la densité d'extraction utilisée lors du lissage est $\rho_{seuil} \geq 0,25$. La partie en vert est la partie qui sera utilisée pour le raccordement par triangles (voir détail A2 illustré sur la Figure 5-16).

La Figure 5-15 met en évidence la répartition du rayon des sections transversales (en m) avant (Figure 5-5a) et après (Figure 5-5b) normalisation. Le squelette final comporte 4 poutres droites, 8 points d'extrémité et aucun point de jonction. Le rayon maximal obtenu est d'environ $50cm$.

Comme dans le cas d'étude précédent, il est difficile de ne pas remarquer le manque de symétrie dans le résultat obtenu sachant que le problème initial est symétrique. Ceci pourrait avoir plusieurs causes. Tout d'abord, il n'y a aucune garantie ou vérification effectuée pour s'assurer que la forme optimisée adaptée à convertir soit symétrique. Ensuite, le maillage tétraédrique utilisé étant non structuré, il ne favorise pas l'obtention d'une forme optimisée symétrique. Enfin, le calcul du rayon des sections prend en compte uniquement le nuage de points d'une frontière structurelle adaptée ce qui résulte, comme on le voit sur la Figure 5-5a, en une répartition non symétrique des rayons de section.

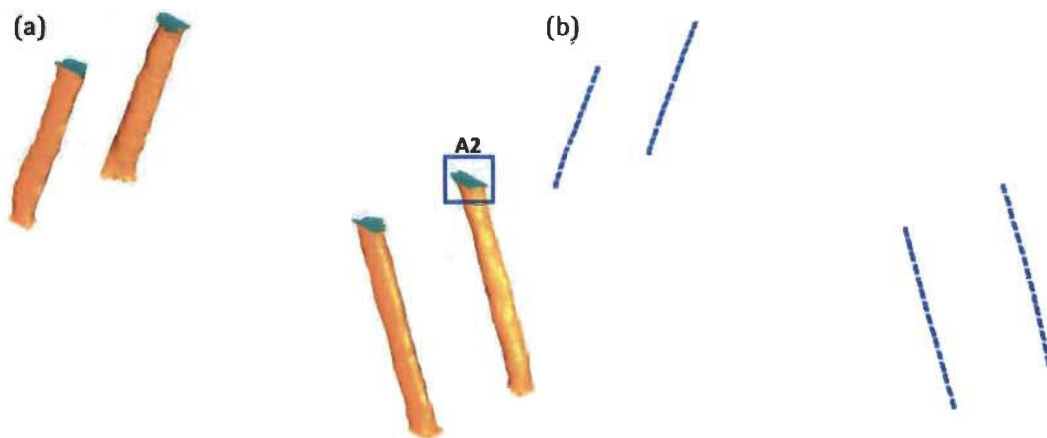


Figure 5-14 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.

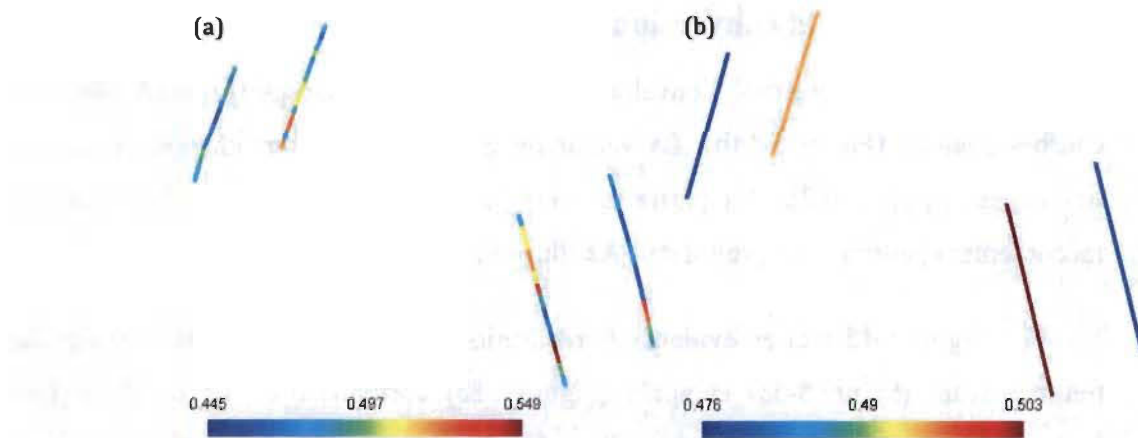


Figure 5-15 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).

La Figure 5-16 insiste particulièrement sur le raccordement par triangles où un total de 350 mini-poutres ont été utilisées pour ce modèle. Elle met également en lumière les mini-poutres à l'un des raccords, celui identique au détail A2.

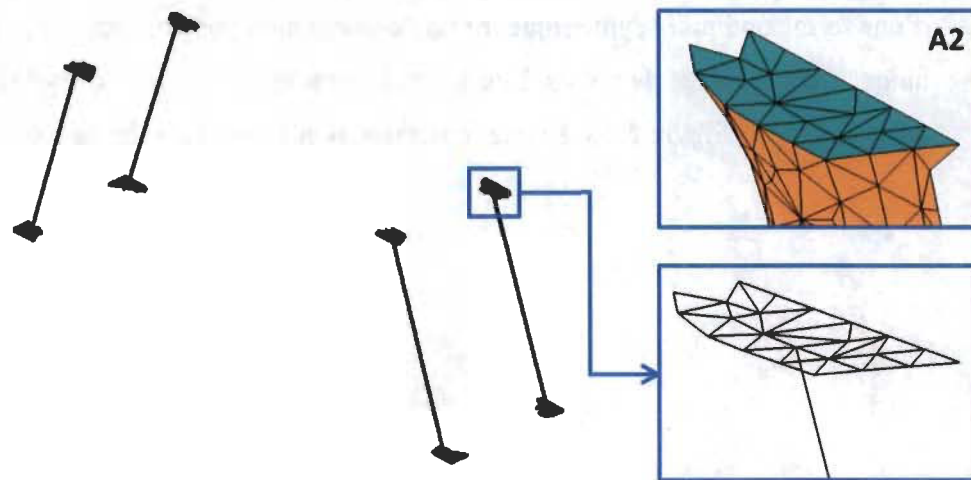


Figure 5-16 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.

La Figure 5-17 présente le modèle 1D-3D après maillage, où la partie volumique est en vert et le squelette est en noir.

La Figure 5-18a illustre la répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*) et la Figure 5-18b la norme du vecteur déplacement (en *mm*). Il en ressort de cette dernière que le déplacement maximal se retrouve au milieu du tablier et a une valeur maximale d'environ *5mm*.

La Figure 5-19 présente l'allure de la structure après déformation, où un facteur de 300 a été appliqué.

Le Tableau 5-6 regroupe les résultats du modèle de ce nouvel exemple. Il s'agit ici des caractéristiques du squelette, des valeurs des volumes et des fractions volumiques obtenues, ainsi que des valeurs des compliances avant et après conversion.

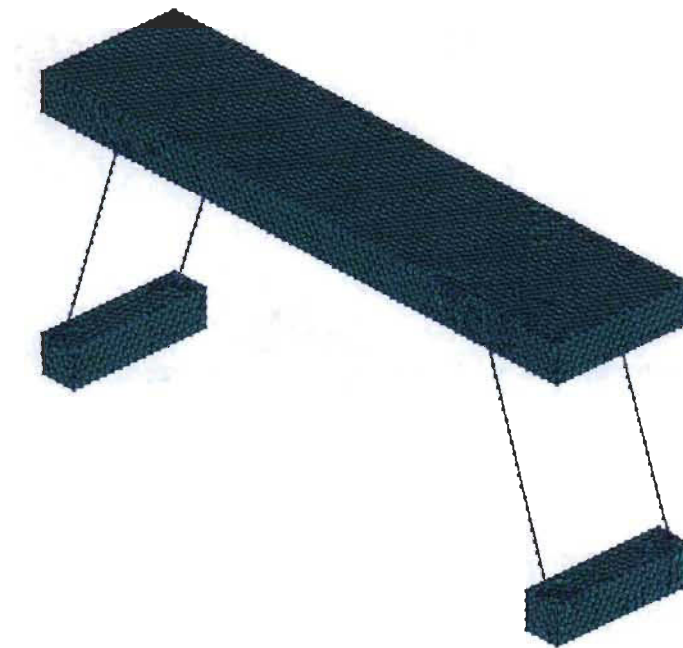


Figure 5-17 : Modèle 1D-3D maillé.

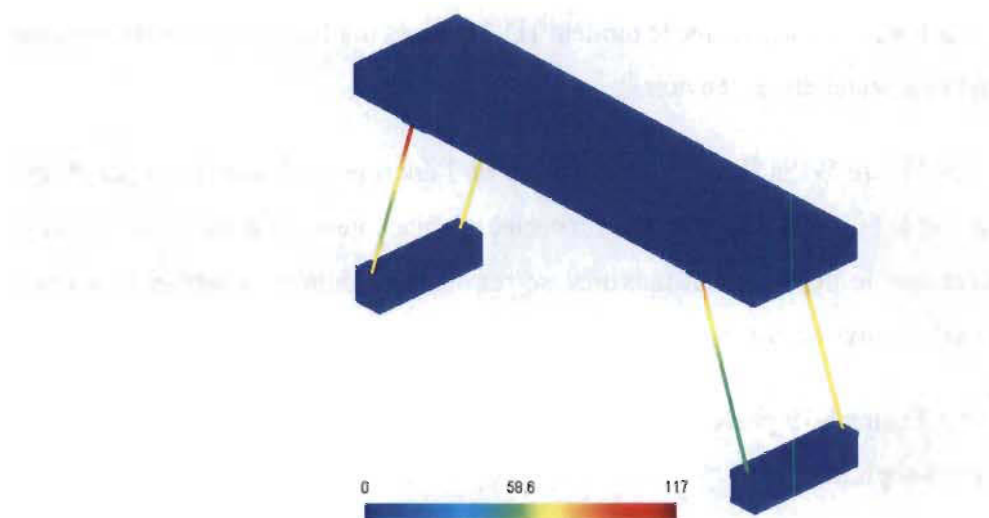


Figure 5-18 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*).

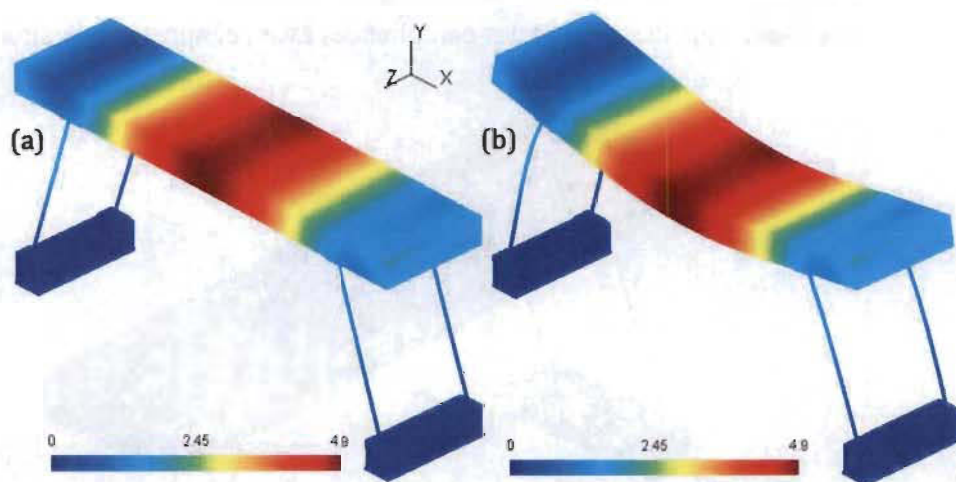


Figure 5-19 : (a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement $\times 300$) (en *mm*).

La Figure 5-20 présente la répartition des contraintes signées minimale et maximale σ_x dans les poutres. Elles tiennent compte des contraintes axiale et de flexion, et sont calculées dans le repère local de la poutre. La contrainte maximale est $|\sigma_x| = 16,150 \text{ MPa}$ et les alentours du contact entre les poutres et le tablier sont les zones les plus sollicitées.

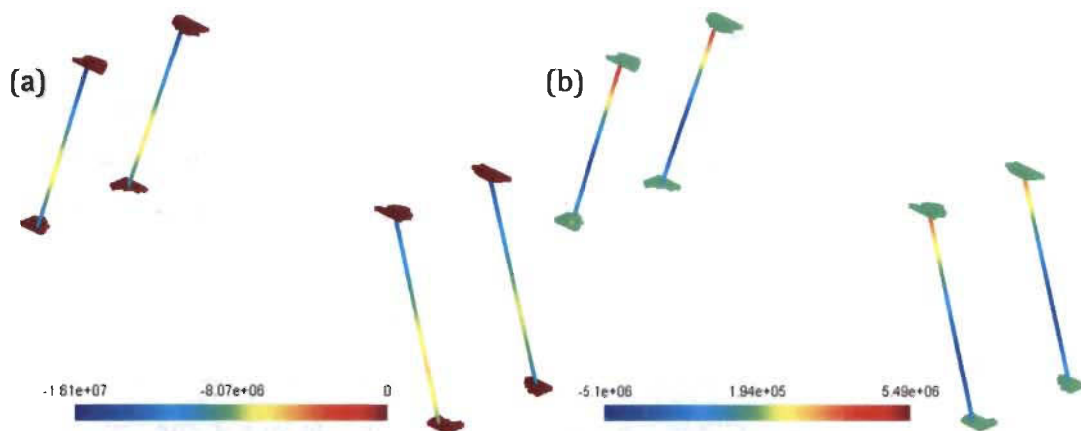


Figure 5-20 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.

Tableau 5-6 : Exemple 2 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.

Caractéristiques du squelette	
Nombre de points de jonction	0
Nombre de points d'extrémité	8
Nombre total de poutres droites	4
Nombre total de mini-poutres	350
Volumes	
Volume total de <i>design</i> initial : V_d	1275 m^3
Volume objectif : $V_{objectif}$	$25,50 \text{ m}^3$
Volume après lissage : V_{lisse}	$25,48 \text{ m}^3$
Volume construit : V_{rec}	$26,79 \text{ m}^3$
Fraction volumique	
Fraction volumique prescrite	2,00 %
Fraction volumique construite	2,10 %
Compliance de la structure	
Compliance effective après AEF 3D : C_{eff}	$33\,696 \text{ J}$
Compliance après 1D-3D FEA : C_{rec}	$34\,315 \text{ J}$
Contrainte dans la structure	
Contrainte maximale $ \sigma_x $	$16,150 \text{ MPa}$

5.4.3 Analyse des résultats

La forme du modèle optimisé est similaire à celle obtenue par [139]. À l'inverse de l'exemple précédent, dans ce second cas d'application on remarque, à partir du Tableau 5-4, que le paramètre de raffinement χ est faible. Cela est à l'origine du faible taux d'amélioration de la compliance (environ 11 %). Cette tendance est suivie par le rapport de taille qui est de 0,6 (soit 3/5 après 2 adaptations). Par contre à cause du déraffinement, seulement la moitié du nombre initial d'éléments (environ 500 000 tétraèdres) a été utilisée pour les adaptations du maillage. Cette division de moitié du nombre d'éléments du maillage initial a permis de gagner en temps d'optimisation à travers les adaptations et ce, tout en conservant un nombre d'itérations presque constant pour chaque optimisation par la méthode SIMP. Avec une qualité des éléments semblables, l'on est passé dans cet exemple en termes de temps d'optimisation de *1 itération/300 secondes* à environ *1 itération/90 secondes*. La compliance diminue à travers les adaptations comme prévu pour atteindre à la fin 49 492 J.

Une des principales observations après la conversion du modèle optimisé adapté (voir Tableau 5-6) est le fait de parfaitement retrouver la prescription volumique initiale. Une partie de l'explication se trouve dans le fait que ce modèle ne contient aucun point de jonction. Cela a pour effet de limiter les pertes volumiques dues à la mauvaise définition du squelette dans de telles zones et son manque de centrage. L'autre partie de l'explication est dans la forme optimisée proprement dite. De fait, le modèle optimisé obtenu s'oriente vers une structure constituée de poutres qui sont déjà droites et de section constante le long des poutres, ce qui cadre assurément avec les différentes considérations de l'approche proposée. Cet ensemble de faits permet de trouver une compliance du modèle converti presque égale (à plus de 98 %) à celle du modèle optimisé adapté.

5.5 Cas d'étude 3 : Chaise

Le troisième et dernier exemple est celui d'un modèle de type chaise. La Figure 5-21 illustre le modèle initial et les conditions aux limites et de chargement. Ce modèle est un modèle de chaise. Les dimensions globales du modèle sont de $304,8\text{mm} \times 355,6\text{mm} \times 787,4\text{mm}$ (soit en pouces $12" \times 14" \times 31"$). Les forces par unité de surface appliquées dans les directions Y et Z (Figure 5-21a) sont respectivement de $17,2\text{kN/m}^2$ et $8,0\text{kN/m}^2$.

5.5.1 Résultats de la méthode SIMP adaptative

La Figure 5-21b présente le résultat de la subdivision en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge). Le dossier et le siège ne seront donc pas influencés par l'optimisation et la conversion.

Le Tableau 5-7 donne les paramètres d'adaptation utilisés lors de l'optimisation topologique adaptative. La fraction volumique prescrite est de 2 %. En comparaison avec les autres cas, cet exemple a la particularité d'avoir un nombre d'adaptations égal à 3, soit l'application de 4 optimisations par la méthode SIMP.

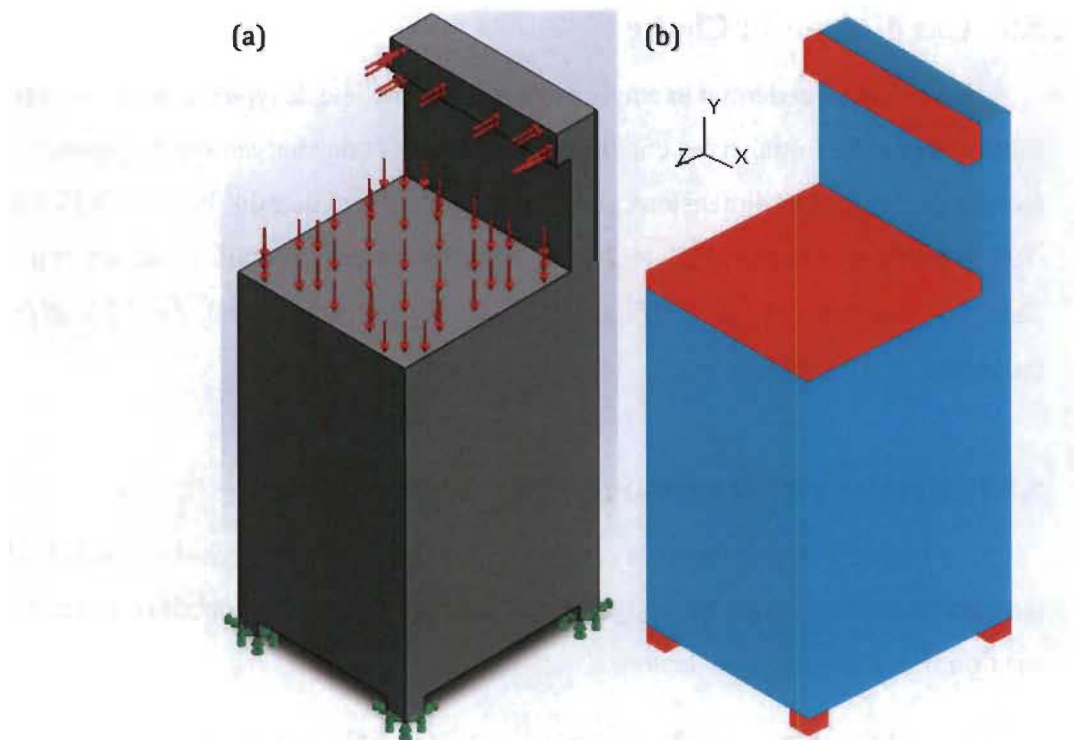


Figure 5-21 : Modèle initial avec (a) les conditions aux limites et de chargement, (b) la subdivision en sous-domaines de *design* (en bleu) et de *non-design* (en rouge).

Tableau 5-7 : Exemple 3 - Synthèse des paramètres utilisés pour la SIMP adaptative.

<i>Paramètre</i>	<i>Désignation</i>	<i>Valeur</i>
d_g	Taille (écart nodal) du maillage uniforme initial	13 mm
f	Fraction volumique	7 %
n	Nombre de couches du filtrage	1
E_{nm}	Paramètre de déraffinement	16 mm
χ	Paramètre de raffinement	1,5
n_Δ	Nombre maximal d'adaptations	3

Suivant le même principe que les exemples précédents, la Figure 5-22 présente les répartitions de la densité de matière dans le sous-domaine de *design*. Les maillages utilisés pour chacune des SIMP sont également présentés sur la figure. Les résultats sur les tailles minimales et maximales, la qualité du maillage, la différence entre la prescription et la réalisation, ainsi que les résultats d'optimisation sont regroupés dans le Tableau 5-8.

Tableau 5-8 : Exemple 3 - Synthèse des résultats après la SIMP adaptative.

		Maillage initial	Adaptation1	Adaptation2	Adaptation3
Maillage	Prescription	233 526	178 882	215 599	298 644
	Réel	189 640	148 951	176 143	228 690
	Erreur respect carte	18,79 %	16,73 %	18,30 %	23,42 %
Qualité (%)	$Q_e \leq 0,1$	0,00 %	0,00 %	0,00 %	0,00 %
	$0,1 < Q_e \leq 0,2$	0,01 %	0,03 %	0,05 %	0,05 %
	$0,2 < Q_e \leq 0,5$	19,46 %	24,68 %	26,02 %	28,79 %
	$Q_e > 0,5$	80,53 %	75,28 %	73,93 %	71,16 %
Tailles	Taille min		6,9 mm	2,8 mm	1,2 mm
	Taille max		16 mm	16 mm	16 mm
	Rapport taille		0,43	0,18	0,075
Optimisation	Nb. d'itérations	27	24	24	22
	Temps opt.	32 min	15 min	19 min	20 min
	Convergence	1 %	0,5 %	0,25 %	0,125 %
	Compliance	0,0142 J	0,0105 J	0,0093 J	0,0085 J

Les répartitions de la densité à la fin de la méthode SIMP adaptative sont illustrées sur la Figure 5-23 pour les 1^{re} et 3^e optimisations et pour différentes valeurs de ρ_{seuil} . On a également de haut en bas sur la figure : $\rho_{seuil} = 0$ (donc aucun seuillage), $\rho_{seuil} = 0,25$, $\rho_{seuil} = 0,50$ et $\rho_{seuil} = 0,75$. De manière analogue à l'exemple du support en L, on constate une perte de continuité dans le résultat de la 1^{re} optimisation pour des valeurs élevées de ρ_{seuil} (exemple de $\rho_{seuil} = 0,75$). Ceci n'est pas le cas pour le résultat de la 3^e optimisation, puisque le maillage a été adapté.

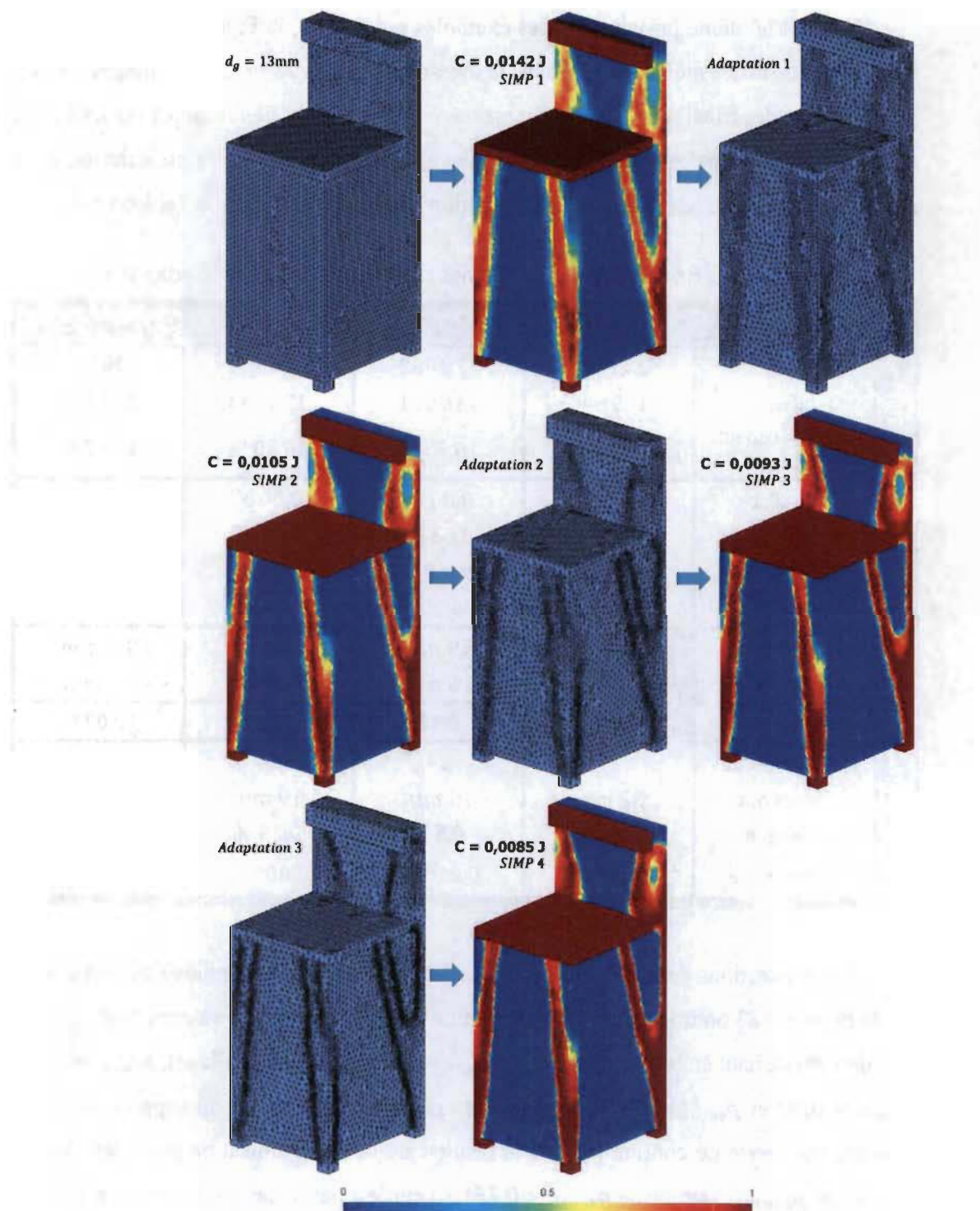


Figure 5-22 : Maillages et répartitions optimales de la densité au fil des adaptations.

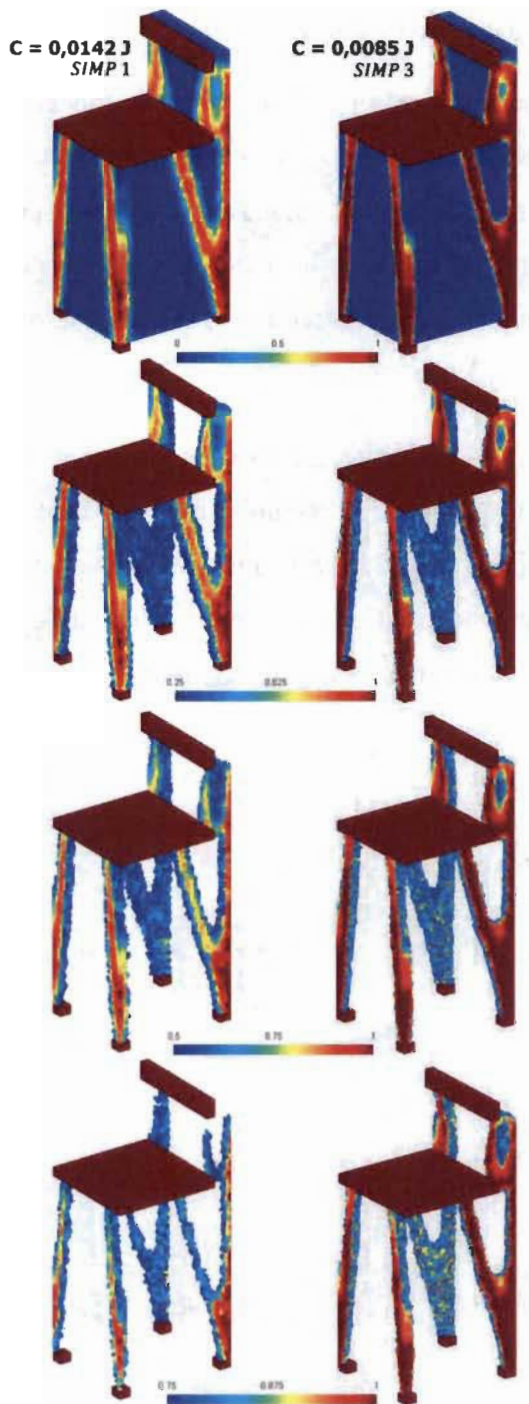


Figure 5-23 : Répartitions de la densité de matière à la fin de la méthode SIMP adaptative pour différentes valeurs de la densité seuil d'extraction.

5.5.2 Résultats de la conversion

La Figure 5-24 présente l'enveloppe du modèle optimisé adapté après lissage, où seuls les éléments de densité $\rho_{seuil} \geq 0,30$ ont été retenus (Figure 5-24a). Sur cette figure l'on retrouve aussi le résultat obtenu après squelettisation (Figure 5-24b). La partie verte est la zone de contact avec le *non-design*. Aussi, la zone verte sur le modèle lissé représente l'interface de contact dont les éléments seront utilisés lors du raccordement 1D-3D (voir détail **A3** illustré sur la Figure 5-26).

La Figure 5-25 illustre la répartition du rayon des sections transversales de chaque poutre avant (Figure 5-25a) et après (Figure 5-25b) le processus de normalisation. Le squelette final (Figure 5-25b) est composé de 10 poutres droites, 10 points d'extrémité et de 4 points de jonction. Ce squelette est différent des autres, car il possède 2 points de jonction à raccorder au *non-design*. Le rayon maximal obtenu est d'environ 18mm.

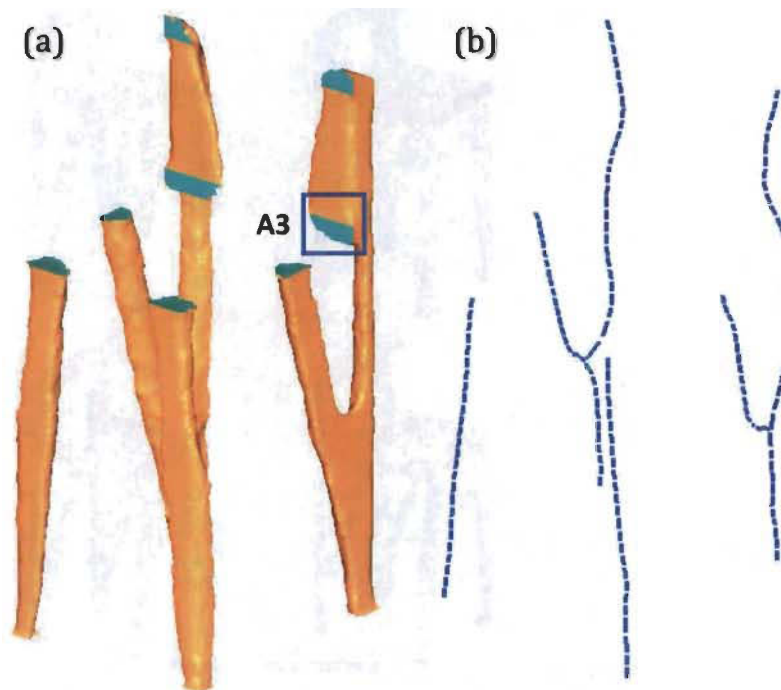


Figure 5-24 : Silhouette optimisée obtenue après (a) lissage et (b) squelettisation.

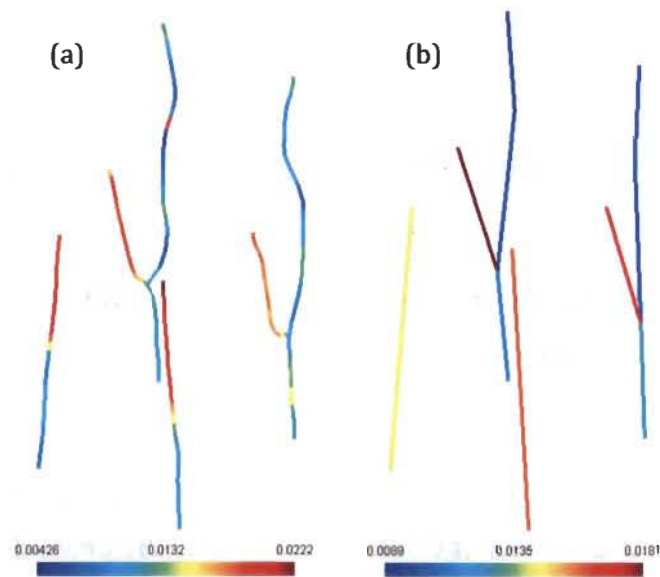


Figure 5-25 : Répartition du rayon des sections (a) avant et (b) après normalisation (m).

La Figure 5-26 met particulièrement l'accent sur le raccordement par triangles où un total de 1001 mini-poutres ont été utilisées pour ce modèle. Elle met également en relief les mini-poutres à l'un des raccords, celui identique au détail A3.

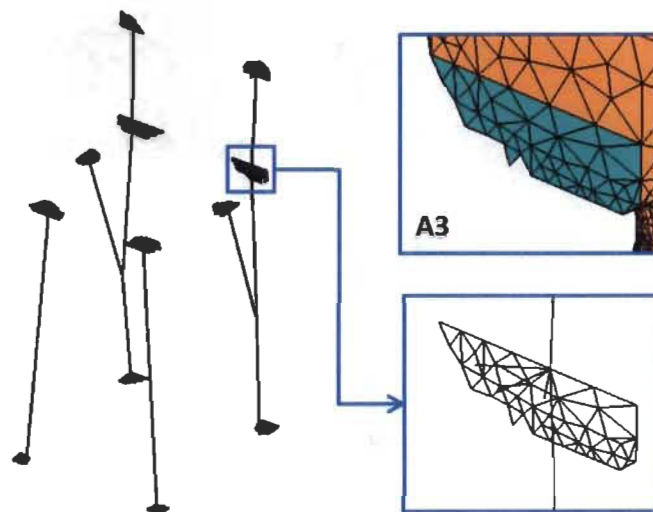


Figure 5-26 : Illustration du raccordement par triangles avec les mini-poutres.

La Figure 5-27 présente le modèle 1D-3D après maillage, en particulier le maillage des poutres. La partie volumique est en vert et le squelette est en noir.

La Figure 5-28a présente la répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*).

Les Figure 5-29 présente la norme du vecteur déplacement (Figure 5-29a), ainsi que l'allure de la structure après déformation, où un facteur de 2000 a été appliqué (Figure 5-29b).

Comme pour les autres exemples, le Tableau 5-9 renseigne sur les résultats du modèle converti. Il s'agit évidemment des caractéristiques du squelette, des valeurs des volumes et des fractions volumiques obtenues, ainsi que des valeurs des compliances avant et après conversion.



Figure 5-27 : Modèle 1D-3D maillé.



Figure 5-28 : Répartition de l'énergie de déformation par élément (en *Joules*).

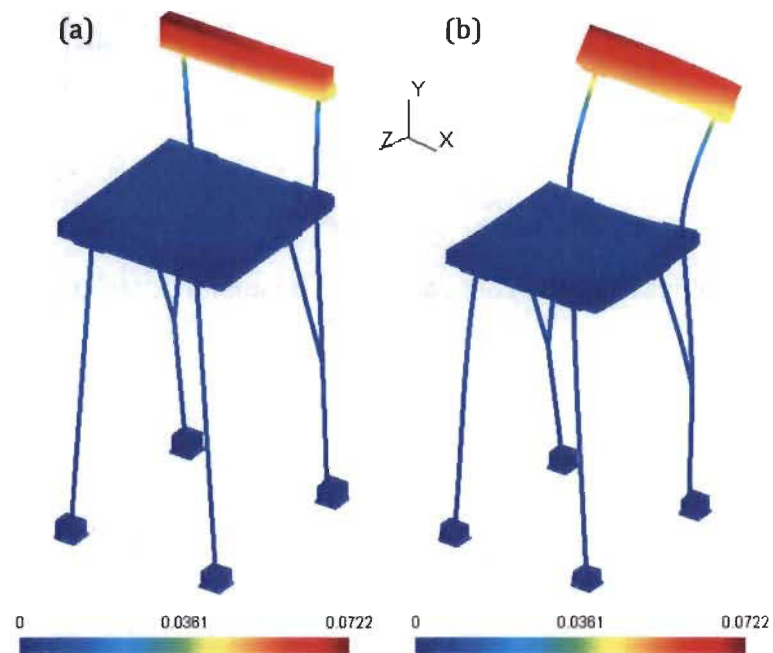


Figure 5-29 : a) Norme du vecteur déplacement et (b) déformée (déplacement \times 2000) (en *mm*).

La Figure 5-30 présente la répartition des contraintes signées minimale et maximale σ_x dans les poutres. Ces dernières cumulent les contraintes axiale et de flexion et sont calculées dans le repère local de la poutre. La zone la plus sollicitée se trouve autour de la jonction entre le dossier et le siège, avec une contrainte maximale de $|\sigma_x| = 19,920 \text{ MPa}$.



Figure 5-30 : Distribution des contraintes (a) minimale et (b) maximale dans les poutres.

Tableau 5-9 : Exemple 3 - Tableau récapitulatif des résultats du modèle.

Caractéristiques du squelette	
Nombre de points de jonction	4
Nombre de points d'extrémité	12
Nombre total de poutres droites	10
Nombre total de mini-poutres	1001
Volumes	
Volume total de <i>design</i> initial : V_d	0,05900 m^3
Volume objectif : $V_{objectif}$	0,00413 m^3
Volume après lissage : V_{lisse}	0,00412 m^3
Volume construit : V_{cons}	0,00180 m^3
Fraction volumique	
Fraction volumique prescrite	7,00 %
Fraction volumique construite	3,05 %
Compliance de la structure	
Compliance effective après AEF 3D : C_{eff}	0,0070 J
Compliance après 1D-3D FEA : C_{rec}	0,0148 J
Contrainte dans la structure	
Contrainte maximale $ \sigma_x $	19,920 MPa

5.5.3 Analyse des résultats

Les résultats du Tableau 5-9 permettent de constater une amélioration de 40% de la compliance finale par rapport à la compliance initiale (sans adaptation) après 3 adaptations de maillage. Elle passe en effet de 0,0142 J à 0,0085 J (voir Figure 5-23). Ceci va de pair avec la nette amélioration de la définition des frontières structurales remarquée à la fin des SIMP1 et SIMP4 (voir Figure 5-22). Il apparaît une fois de plus que cette amélioration de la compliance globale est liée à la meilleure répartition de la densité dans les éléments du maillage adapté. Cependant, malgré une faible différence de taille entre E_{nm} et d_g , la densification excessive du maillage adapté occasionne la diminution de la qualité des éléments. Cela aboutit à un ratio de tailles aussi faible que 0,075 (environ 1/13). Ceci

illustre bien une des principales limites de l'approche proposée, qui est l'absence d'un critère de convergence. En effet, le modèle optimisé n'a cessé d'être amélioré (compliance finale et description des frontières structurelles) après chacune des 3 adaptations, c'est-à-dire après l'application de quatre SIMP.

Par ailleurs il apparaît, comme pour les exemples précédents, que le modèle optimisé adapté est plus rigide que celui converti. Ceci trouve son origine à plusieurs niveaux. Tout d'abord, seulement 3 % de la fraction volumique a été construite sur le 7 % prescrit, soit moins de la moitié. Ajouté à cela, le fait de considérer la section constante tout le long de la poutre, alors que ce n'est pas le cas, particulièrement dans cet exemple (voir Figure 5-24a). De fait, ce modèle a la particularité d'avoir une forme optimisée plus proche d'une structure volumique que d'une structure de poutres, surtout dans les barres verticales du dossier et dans les jonctions des pattes. Notre hypothèse n'est donc plus vérifiée et une analyse par éléments finis 3D, et non plus 1D-3D, serait plus pertinente. Aussi, il serait difficile de passer sous silence le fait que cette solution est la moins satisfaisante de tous les exemples étudiés.

5.6 Discussion générale

Tout d'abord, rappelons que convertir en modèles CAO les modèles optimisés topologiquement permet de s'affranchir de l'un des principaux points d'achoppement de l'intégration des méthodes d'optimisation topologique dans le développement des produits par la CAO, qui est l'interprétation automatique du modèle optimisé. Ce travail permet notamment d'augmenter la fabricabilité du modèle converti, en particulier lorsqu'on utilise les procédés traditionnels comme l'usinage, le moulage et la fabrication par déformation. La forme difficilement exploitable du modèle optimisé peut maintenant être remplacée par une structure composée de poutres droites. En complément, adjoindre au résultat de la méthode SIMP une répartition des contraintes dans le modèle converti ouvre la porte à d'autres possibilités à explorer (voir sous-section 6.1.1 pour quelques exemples). Enfin, notons que les récents développements de méthodes d'optimisation

topologique orientées vers la fabrication comme [140, 141] et telles que recensées par [3], montrent l'intérêt grandissant de ce sujet.

Le Tableau 5-10 regroupe les principaux résultats des modèles convertis. Tous les modèles et jusqu'à une certaine mesure le modèle de la chaise utilisés pour tester l'approche proposée ont donné des résultats probants. Les frontières structurales sont mieux définies et la compliance diminue au fil des adaptations. C'est ainsi que l'on obtient un modèle optimisé adapté (méthode SIMP adaptative) plus rigide que le modèle simplement optimisé (méthode SIMP), notamment du fait d'une meilleure répartition de la densité dans les éléments du maillage adapté.

Tableau 5-10 : Tableau récapitulatif des résultats des modèles adaptés convertis.

Modèles	Cas test	Support-L	Pont	Chaise
Nombre de tétraèdres par maillage				
Maillage uniforme	213 512	345 441	493 863	189 640
Maillage adaptation 1	76 766	145 349	250 883	148 951
Maillage adaptation 2	85 411	182 260	250 079	176 143
Maillage adaptation 3				228 690
Optimisation topologique adaptative				
Compliance après SIMP1 : $\tilde{C}_1 (J)$	557	0,21	55 677	0,0142
Compliance après SIMP2 : $\tilde{C}_2 (J)$	477	0,16	51 079	0,0105
Compliance après SIMP3 : $\tilde{C}_3 (J)$	452	0,13	49 492	0,0093
Compliance après SIMP4 : $\tilde{C}_4 (J)$				0,0085
Conversion en modèle CAO de structure de poutres assemblées				
Volume objectif : $V_{objectif} (m^3)$	19,50	0,090	25,50	0,00413
Volume construit : $V_{cons} (m^3)$	18,03	0,063	26,79	0,00180
Compliance effective : $C_{eff} (J)$	292	0,075	33 696	0,0070
Compliance construite : $C_{cons} (J)$	335	0,153	34 315	0,0148

Cette recherche étend aux modèles 3D et applique à l'optimisation topologique l'idée de [7, 8] initialement créée dans un contexte de traitement d'images (pixels). De plus, elle convertit et valide le modèle CAO découlant, ce qui la distingue de plusieurs démarches d'interprétation comme [27, 47, 49, 52]. Aussi, au regard des travaux de [2, 63, 67] qui se penchent sur l'application industrielle de l'optimisation topologique, la méthodologie développée pourrait être implantée dans des logiciels d'optimisation topologique afin de présenter au concepteur une structure composée de poutres droites parmi les options d'interprétation du modèle optimisé.

La comparaison des modèles convertis et optimisés adaptés a révélé un écart entre leurs compliances respectives. Les modèles convertis seraient moins rigides que les modèles optimisés adaptés. Cet écart de rigidité peut avoir plusieurs origines. La première d'entre elles serait la différence de volume entre les deux modèles. Moins de volume équivaut à moins d'énergie résistante et donc à une augmentation de la compliance (ou diminution de la rigidité). La différence de volume quant à elle serait imputable au processus de normalisation, puisque les poutres normalisées obtenues étaient initialement courbes et de section variable le long de chaque branche du squelette.

Ensuite, le squelette tel qu'extrait dans cette étude bien qu'adapté aux éléments tubulaires n'est cependant pas centré et est mal défini aux extrémités et aux jonctions [116]. Cet ensemble de phénomènes viendrait du fait que l'extraction du squelette est basée sur une contraction locale de type *Laplacien* qui ne tiendrait pas compte des informations sur la position initiale des nœuds. De plus, le processus itératif d'élagage qui part d'un segment et supprime tous les triangles incidents à ce segment ne favoriserait pas le centrage du squelette dans cette zone.

Pour finir, cet écart entre les compliances peut être attribuable au simple fait que les 2 structures ne travailleraient pas de la même façon. En effet, on a d'un côté un assemblage de poutres droites connectées à la partie volumique à l'aide d'un raccordement, et de l'autre une répartition continue de la matière dans le volume. Rappelons qu'une différence

dans la répartition de la contrainte de Von Mises avait déjà été observée et ce, en fonction du type de raccordement (voir Tableau 4-1, ainsi que les Figure 4-31 et Figure 4-36). Il n'est donc pas surprenant que la rigidité de la structure de poutres raccordées soit inférieure à celle de la structure volumique continue.

Mentionnons également que le modèle converti obtenu n'est pas symétrique, bien que le problème d'optimisation, souvent, le soit. Ceci pourrait provenir du maillage. En fait, étant non structuré, ce dernier cause un manque de symétrie dans le modèle optimisé adapté et, par ricochet, influence la symétrie du modèle converti. De surcroît, la courbesquelettisation ne tient pas compte de la symétrie globale ou locale dans l'objet à squelettiser [116], en plus du fait qu'elle est mal définie aux jonctions.

En outre, les formes obtenues par optimisation topologique sont des silhouettes originales et innovantes [142]. Elles forment un support à une créativité qui va souvent au-delà du cadre d'idées empiriques du concepteur. Il est donc pertinent de vérifier si les formes optimisées proposées, bien plus que des modèles virtuels en 3D, se rapprochent des objets ou structures du monde réel. C'est ainsi qu'il a été possible de valider que les modèles optimisés présentés dans ce chapitre sont bien réalistes, semblables à des pièces et structures existantes. De fait, le modèle du support en forme de L (cas d'étude 1) dont l'allure générale est corroborée par les récents résultats en 3D de [143], est proche d'un support d'antenne pour satellite [144]. De même, la forme optimisée du pont (cas d'étude 2) correspond à la structure bien connue sous l'appellation de *pont à béquilles*. Une illustration de ce type de pont dans le monde est le pont à béquilles inclinées à deux articulations de *Grande-Duchesse Charlotte* au Luxembourg [145]. Finalement, la forme optimisée de la chaise (cas d'étude 3) peut être vue comme une version plus simple des modèles de chaise populairement connus sous le nom de *chaises squelettiques*, ou encore en anglais *bone chair* [146].

Malgré des résultats concluants, plusieurs difficultés ont été relevées lors du développement ou de l'application de l'approche proposée. En l'occurrence, lors de la phase d'adaptation du maillage, les tailles prescrites peuvent être très faibles, donc une trop grande variation de taille sur l'étendue du maillage. Ceci rallonge le temps de maillage et donc le temps total de l'étude. Ensuite, au-delà des améliorations que procure la méthode SIMP adaptative, le raffinement des frontières structurelles devait permettre de réduire le *bruit* de l'enveloppe du modèle optimisé après extraction, afin de faciliter l'application des méthodes de lissage qui conservent les détails fins comme les arêtes vives lorsque nécessaires. Cette attente ne fut guère comblée.

Dans la même lancée, nous voulions exploiter la répartition de la densité dans le résultat de l'optimisation en concevant une méthode de courbe-squelettisation. Cette dernière aurait entre autres permis de se passer de l'étape de lissage. Cette entreprise ne fut pas concluante. Plus encore, la méthode de courbe-squelettisation utilisée dans ce travail prenant en entrée un nuage de points et étant robuste au bruit, l'idée était d'extraire le squelette directement à partir de l'enveloppe de la forme optimisée adaptée. Cette attente non plus ne fut pas satisfaite probablement parce que ladite méthode a été développée et validée sur des nuages de points qui ont un niveau de bruit uniforme et faible (car générés à partir des scanners), contrairement à l'irrégularité de l'enveloppe du modèle optimisé. Un lissage de cette enveloppe qui aboutit à des triangles conformes comme le lissage *Laplacien* était finalement nécessaire. C'est ainsi qu'une enveloppe manifold devait être extraite, le lissage effectué, avant l'extraction du squelette.

Enfin, lors de la courbe-squelettisation, il est arrivé dans certains cas que des points du squelette, en particulier des points d'extrémité, se trouvent hors du solide, c'est-à-dire en dehors de la frontière délimitée par le modèle optimisé adapté. Évidemment ces points ont dû être supprimés. Le fait que la méthode de squelettisation prenne en entrée un nuage de points, donc perte des notions d'intérieur ou d'extérieur du modèle, serait probablement une des causes de ce phénomène.

5.7 Conclusion

Tout compte fait dans ce chapitre trois modèles, à savoir un support en L, un pont et une chaise, ont été utilisés pour valider la méthodologie d'interprétation en modèles CAO développée dans cette thèse. Cette méthodologie comprend une adaptation du résultat d'optimisation, suivie de la transformation en modèle CAO du modèle optimisé adapté. À la lumière des cas d'étude présentés, on obtient une meilleure résolution des solutions optimisées après un ajustement de la densité nodale du maillage à travers l'adaptation et ce, en dépit de plusieurs autres attentes non comblées par cette dernière. Quoique ce constat soit valable pour tous les exemples étudiés, certaines faiblesses ont été mises en relief, particulièrement par le cas d'étude 3 (modèle de la chaise). Il s'agit en l'occurrence de l'absence d'un critère de convergence automatique de la méthode SIMP adaptative, ce qui constitue vraisemblablement l'un des défis futurs à relever. Par contre force est de remarquer que certains cas, comme l'exemple du *pont à béquilles*, ont donné des solutions existantes et bien connues dans le monde de l'ingénierie. Cela pousse à constater que les silhouettes issues du processus d'optimisation topologique sont, à bien des égards, des modèles parfaitement réalistes.

Par ailleurs, en utilisant l'approche de conversion proposée, des modèles CAO représentatifs des modèles optimisés ont été convertis sous des formes plus faciles à exploiter dans la suite du processus de conception, comparativement aux résultats bruts de l'optimisation. Dorénavant, partant d'un modèle CAO initial, il est possible d'obtenir un modèle CAO optimisé sous forme de structure de poutres droites, à condition que le résultat de l'optimisation s'oriente vers ce type de structure.

CHAPITRE 6 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

La méthodologie présentée dans ce travail répond à deux principaux objectifs qui sont la conception d'un processus d'interprétation en modèles CAO des résultats d'optimisation topologique et l'automatisation dudit processus. Pour y arriver, divers problèmes liés à l'interprétation des résultats d'optimisation topologique ont été examinés. Tout d'abord dans le Chapitre 2, une revue de la littérature des méthodes d'optimisation topologique et des techniques d'interprétation des résultats a été présentée. Cette étude bibliographique a permis de relever que seulement un nombre modeste de travaux se sont consacrés à l'interprétation sous forme de modèle CAO des résultats d'optimisation topologique. Plus encore, les méthodes d'interprétation entièrement automatisées sont encore marginales. Une nouvelle stratégie entièrement automatique a donc été développée. Elle comprend l'optimisation topologique adaptative et la transformation en modèle CAO du modèle optimisé adapté.

En s'appuyant sur la méthode SIMP dans le Chapitre 3, une nouvelle approche d'adaptation des résultats d'optimisation a été proposée. Cette adaptation est effectuée après chaque SIMP par remaillage du modèle entier et en utilisant une fonction d'adaptation qui suit la répartition du gradient de la densité de matière. L'approche proposée clarifie la définition de la frontière structurelle, tout en diminuant la compliance globale. Attendu que le squelette d'une forme est une représentation simplifiée et compacte de cette dernière, cet atout a été exploité dans le Chapitre 4 pour construire automatiquement le modèle CAO découlant de la solution de l'optimisation. Pour ce faire, en considérant uniquement des résultats d'optimisation qui tendent vers des structures de poutres, la courbe-squelette de la forme optimisée adaptée a été extraite, puis normalisée sous forme de poutres droites. L'optimisation n'ayant eu lieu que dans le sous-domaine de *design*, c'est uniquement ce dernier qui a été affecté par la conversion. Le modèle CAO ainsi converti a été validé par une analyse multidimensionnelle par éléments finis.

Cette nouvelle méthodologie, présentée de manière illustrative à l'aide d'un exemple *cas test* dans les Chapitre 3 et Chapitre 4, a par la suite été validée sur plusieurs cas d'étude dans le Chapitre 5. Pour tous les cas testés, on retrouve des modèles convertis plus simples à exploiter et plus commodes à fabriquer, comparativement au résultat brut de l'optimisation et ce, sans altération de la silhouette optimisée proposée par la méthode d'optimisation. Toutefois, bien que donnant une solution probante en ce qui a trait à la compliance globale après adaptation et à la qualité du modèle converti, le modèle de la chaise, bien plus que les autres exemples d'application, a soulevé certaines limitations de l'approche proposée. Il s'agit en l'occurrence de l'absence de critère de convergence de l'adaptation et d'une limitation de la variation du gradient de la taille des éléments. Ajouté à cela la position du squelette dans le modèle qui n'est pas centré et l'écart volumique entre les modèles converti et optimisé adapté. Plus encore, certains bénéfices escomptés de l'adaptation ne furent malheureusement pas comblés.

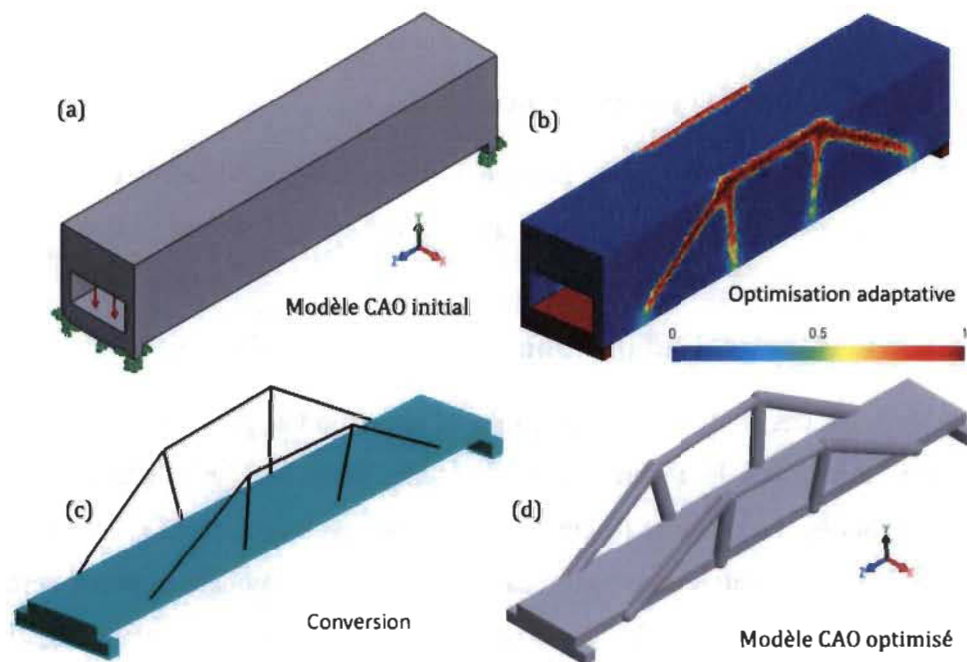


Figure 6-1 : Modèle *cas test* : illustration (a) du modèle CAO initial, (b) du résultat de l'optimisation topologique adaptative, (c) du résultat de la conversion et (d) du modèle CAO sous forme d'assemblage de poutres.

En tenant compte des résultats obtenus, nous pensons avoir mis en lumière l'intérêt de la stratégie développée pour l'interprétation en modèles CAO des résultats d'optimisation topologique, en plus d'avoir démontré son effectivité. Au bout du compte, partant d'un modèle CAO initial, il est désormais possible, et ce de manière automatique, d'aboutir à un modèle CAO optimisé sous forme de structure de poutres telle que le montre la Figure 6-1. L'originalité de l'approche proposée réside notamment, mais non exclusivement, dans la construction de la fonction d'adaptation, l'utilisation de la squelettisation dans le contexte de conversion de modèles optimisés et la validation des modèles convertis par analyse par éléments finis mixtes, en plus de l'automatisation du processus.

Au terme de ce travail, différentes applications potentielles et sources d'amélioration de la méthodologie proposée sont envisageables, comme le présentent les paragraphes suivants.

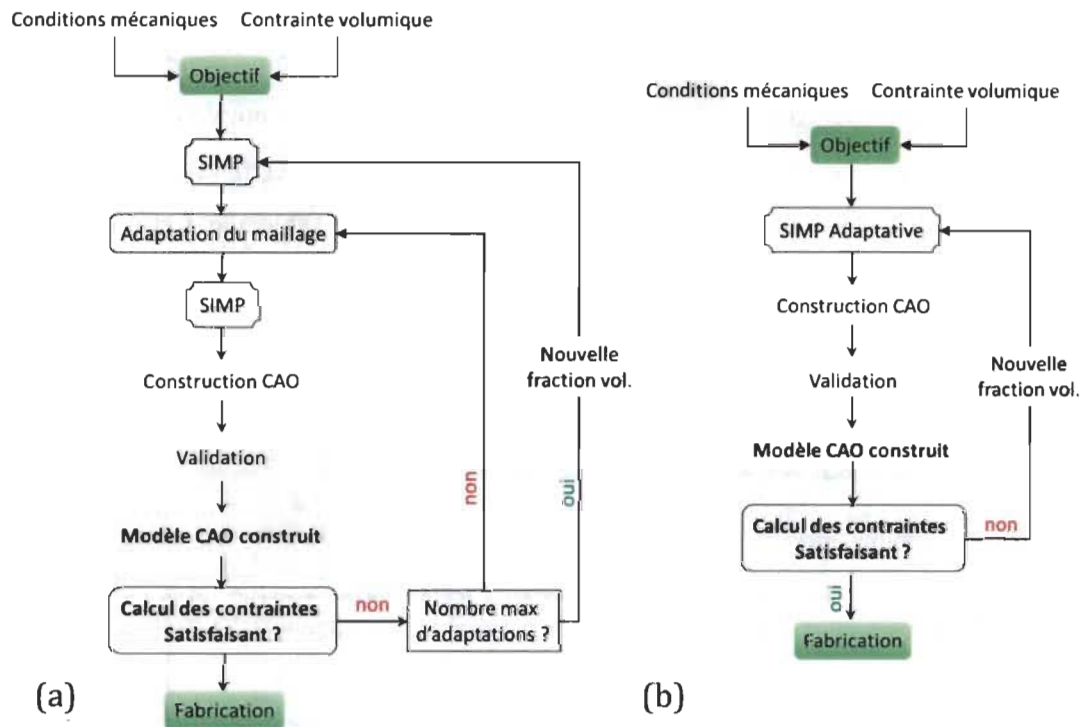
6.1 Perspectives d'applications

L'approche proposée dans cette thèse, telle que présentée, peut également être appliquée dans d'autres contextes qui sont résumés dans cette section.

6.1.1 Boucles d'adaptation de la fraction volumique

Un des contextes d'application de la méthodologie présentée dans cette recherche est illustré sur la Figure 6-2 qui présente deux boucles d'adaptation de la fraction volumique. La première (Figure 6-2) se passerait en deux phases. On appliquerait d'abord la SIMP adaptative avec une seule adaptation. Le modèle converti serait validé et la satisfaction du cahier des charges vérifiée. En cas de non-satisfaction, des adaptations supplémentaires seraient effectuées et ce, tant que le nombre maximal d'adaptations ne serait pas atteint. Dans ce dernier cas, l'on changerait la fraction volumique et le processus recommencerait.

La seconde boucle (Figure 6-2b) consisterait à appliquer un processus de SIMP adaptative et à construire le résultat après convergence de l'adaptation. Une fois de plus, la fraction volumique serait modifiée et le processus recommencerait en cas de non-respect du cahier des charges. Un exemple d'application de cette boucle d'adaptation est présenté dans notre récente publication [16].



En effet, considérons le modèle de support en forme de L, les conditions aux limites et une force par unité de surface appliquée dans la direction Y de $1\text{MN}/\text{m}^2$ (voir Figure 5-1 pour illustration). L'optimisation topologique est effectuée en utilisant la méthode SIMP pour une fraction volumique $f = 4\%$. Après conversion et validation du modèle converti, on retrouve une contrainte maximale $|\sigma_x| = 79\text{MPa}$. Avec la faible valeur de la contrainte tangentielle $|\tau_{xy}| = 7,9\text{MPa}$ devant la contrainte maximale, on peut assimiler la contrainte de Von Mises de la structure par cette dernière, autrement dit

$\sigma_{VM} \approx |\sigma_x| = 79 \text{ MPa}$. Le matériau utilisé étant de l'aluminium, en considérant sa limite élastique $S_y = 135 \text{ MPa}$ et un facteur de sécurité $FS = 2,0$, la contrainte admissible serait $\sigma_a = S_y/FS = 0,5 \times 135 = 67,5 \text{ MPa}$. La comparaison avec la contrainte de Von Mises de la structure donne $\sigma_{VM} = 79 \text{ MPa} > 67,5 \text{ MPa} = \sigma_a$. De ce fait, la solution telle que convertie ne respecte pas la contrainte admissible et ne serait donc pas acceptable. Cependant, au lieu d'optimiser le rayon des sections afin de retrouver une contrainte admissible, l'on a procédé comme suggéré ci-dessus (voir Figure 6-2b), c'est-à-dire par une incrémentation de la fraction volumique f . Ainsi, une nouvelle optimisation suivie de la conversion en modèle CAO a été effectuée en utilisant cette fois une fraction volumique $f = 5\%$. Les résultats obtenus sont contenus dans le Tableau 6-1 et illustrés sur la Figure 6-3. Cette fois le critère de contrainte est satisfait, puisque $\sigma_{VM} = 66 \text{ MPa} < 67,5 \text{ MPa} = \sigma_a$. La nouvelle structure est donc admissible.

Tableau 6-1 : Tableau des résultats de la boucle d'adaptation volumique.

Modèle L-Bracket	$f = 4\%$	$f = 5\%$
Volume (<i>non-design</i> exclu) (m^3)		
Volume total initial : V_d	3,000	3,000
Volume objectif : $V_{objectif}$	0,120	0,150
Volume après lissage : V_{lisse}	0,109	0,148
Volume construit : V_{cons}	0,118	0,152
Compliance de la structure (Joules)		
Compliance globale à la fin de la SIMP : \tilde{C}	1100 J	784 J
Compliance effective après AEF 3D : C_{eff}	528 J	405 J
Compliance après AEF 1D-3D : C_{cons}	753 J	569 J
Contrainte (MPa)		
Contrainte maximale $ \sigma_x $	79	66
Contrainte tangentielle $ \tau_{xy} $	7,900	6,090
Contrainte maximale admissible σ_a	67,5	

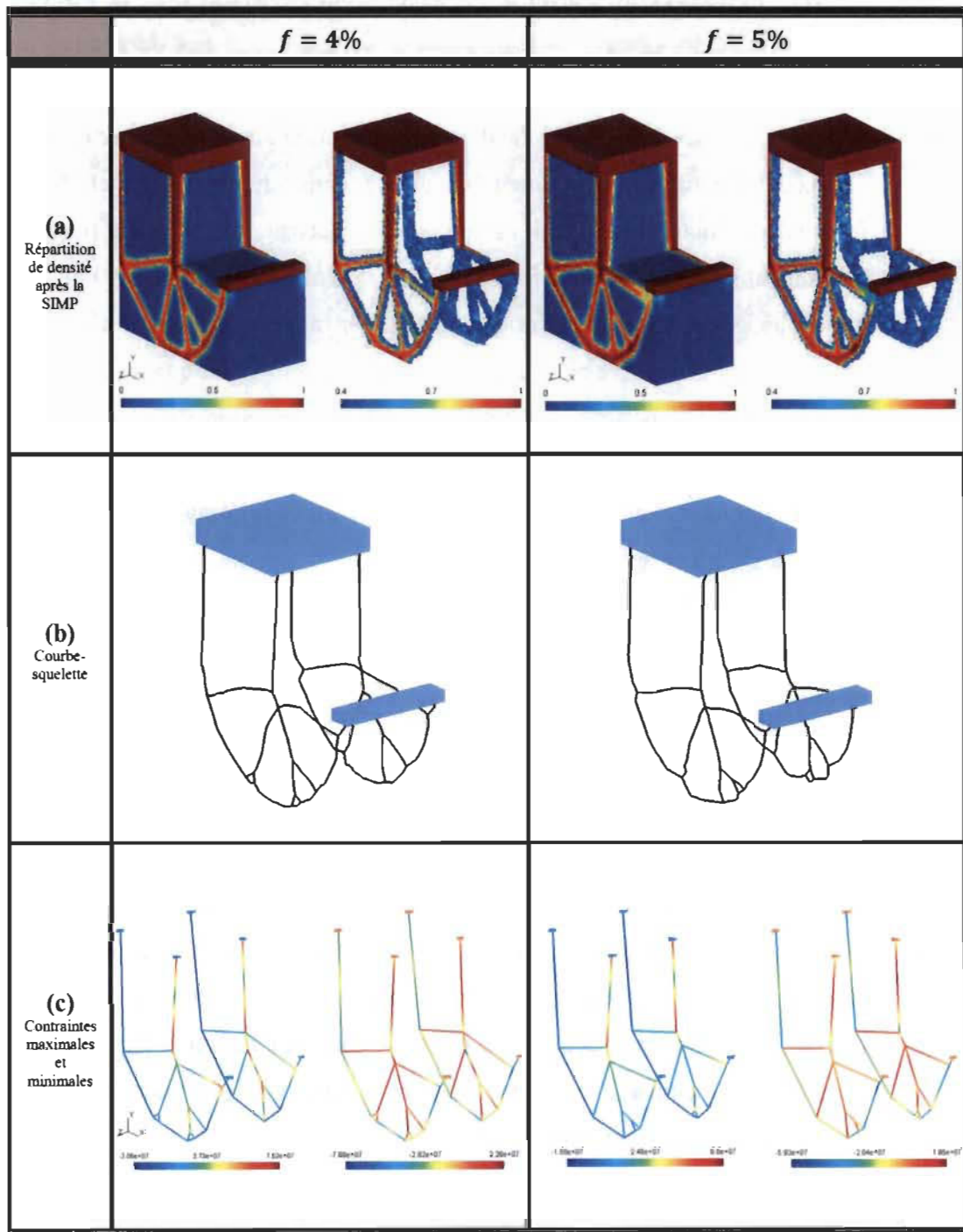


Figure 6-3 : (a) Répartitions optimales de la densité de matière après la SIMP ; (b) la courbe-squelette du modèle et (c) la répartition des contraintes maximales et minimales dans les poutres respectivement pour $f = 4\%$ et 5% (tirée de Nana et al. [16]).

De tels processus permettraient de compléter l'outil que représente la méthode SIMP en lui adjoignant un calcul des contraintes. Plus encore, le fait de changer de fraction volumique pourrait occasionner la création d'une nouvelle silhouette à travers l'optimisation. En revanche, il faudrait faire attention à toujours rester dans la catégorie des modèles optimisés qui tendent vers des structures de poutres. En effet, augmenter la fraction volumique peut créer des zones volumiques dans le modèle optimisé qui sont peu, mal, ou pas convertibles sous forme de poutres (voir sous-section 6.2.9 où la conversion des modèles optimisés qui s'orientent vers les modèles volumiques est abordée). En somme, bien qu'intuitive puisqu'augmenter la fraction volumique revient à augmenter la quantité de matériau et donc réduire la contrainte, une boucle automatique basée sur la contrainte admissible de la structure après la conversion, permettrait d'obtenir des modèles optimisés valides non seulement au niveau de la compliance, mais également au niveau des contraintes.

6.1.2 Enveloppe de la forme optimisée extraite par isodensité

Lors de l'extraction de l'enveloppe du modèle optimisé adapté, seuls les éléments dont la densité est supérieure ou égale à un seuil fixé ont été retenus en conservant les mailles entières. Cette silhouette en elle-même est une approximation. La forme optimisée la plus proche de la solution de l'optimisation serait celle délimitée par une surface isodensité à la valeur seuil [39]. Extraire une isodensité revient à découper certains éléments du maillage pour retrouver la valeur de la densité voulue. Afin de procéder ainsi, une attention particulière devrait être accordée à la continuité de la forme optimisée extraite de la sorte. En effet, des fractions volumiques très faibles étant prescrites dans ce contexte, le découpage des éléments à la densité correspondante ne garantit pas la continuité du modèle après découpage.

6.1.3 Autres applications potentielles

En plus des applications précédentes, il serait possible d'étendre l'approche proposée à d'autres études dont certaines sont présentées dans cette sous-section.

6.1.3.1 *Utilisation d'autres méthodes d'optimisation topologique*

La méthode SIMP adaptative présentée dans ce travail se limite à des résultats d'optimisation topologique qui répartissent notamment la densité de matière dans les éléments du maillage. Bien qu'on puisse l'utiliser quel que soit le type de modèle (volumique ou composé d'éléments de structure ou une combinaison), elle n'est cependant pas directement applicable aux autres méthodes d'optimisation topologique. À l'opposé, l'approche de conversion en modèles CAO proposée prend en entrée l'enveloppe de la forme optimisée et ce, indépendamment de la méthode d'optimisation utilisée. Il serait donc possible d'étendre l'application de cette conversion aux modèles optimisés avec les autres méthodes d'optimisation topologique.

6.1.3.2 *Utilisation d'autres types de fonction*

La fonction de raffinement proposée est une fonction exponentielle. Cette dernière possède certains atouts qui ont été exploités dans le présent travail. Il serait intéressant d'utiliser d'autres types de fonctions ou encore de trouver une autre relation entre les paramètres de la fonction et le gradient de densité et ce, dans une même perspective de raffinement et déraffinement simultanés du maillage. Cette autre relation (ou fonction) permettrait éventuellement de réduire la grande variation de la taille des mailles observée. On obtiendrait par la même occasion une meilleure qualité des éléments (et donc des résultats par éléments finis) et un maillage moins lourd (gains probables en temps) sans perdre sur la qualité de la frontière structurelle. Aussi, il serait intéressant d'introduire une borne inférieure à la taille des mailles afin notamment d'éviter des rapports de tailles très faibles.

6.1.3.3 Utilisation d'autres types de profilés

Les modèles convertis par l'approche proposée se distinguent par leur ensemble de poutres droites de section transversale circulaire et constante le long de la poutre. Utiliser d'autres types de profilés, ainsi que des sections creuses ou encore variables le long de la poutre sont autant de pistes pour des travaux éventuels en lien direct avec l'application de la méthodologie de conversion développée.

6.2 Perspectives d'amélioration

L'analyse des résultats obtenus lors de l'application de l'approche proposée permet de formuler certaines recommandations qui sont les suivantes.

6.2.1 Critère de choix des paramètres de l'adaptation

La fonction d'adaptation proposée prend en compte deux paramètres, l'un lié au raffinement et l'autre relatif au déraffinement du maillage. Les valeurs utilisées pour chacun des paramètres sont essentiellement empiriques, et loin d'avoir une portée générale. La taille de déraffinement est choisie en fonction de la taille uniforme initiale, mais aucune autre indication n'est fournie pour ce choix, encore moins pour le paramètre de raffinement correspondant. Il serait approprié de concevoir une stratégie permettant de proposer pour chaque modèle un couple (taille de déraffinement, paramètre de raffinement) adapté en utilisant par exemple une approche heuristique, autrement dit en procédant par approches successives en retenant seulement une gamme restreinte de solutions qui tendent vers un optimum tout en éliminant progressivement les alternatives et ce, de manière analogue à de nombreux paramètres de la méthode SIMP. De plus, étudier la sensibilité de l'approche proposée par rapport à ces paramètres, analyser l'effet de ces derniers sur l'enveloppe extraite et par la suite sur le modèle converti pourrait fournir des informations pertinentes pour leur ajustement.

6.2.2 Critère de convergence et gradient de taille

Le critère de convergence est une condition qui indique notamment qu'aucune amélioration significative du résultat n'est à attendre et qu'il est donc inutile de pousser l'exécution de l'algorithme plus loin. Les exemples d'application et en particulier le modèle de la chaise ont fait ressortir la nécessité de contrôler la variation de la taille des éléments du maillage. En effet, similairement aux travaux de plusieurs chercheurs, le critère d'arrêt actuel est basé sur un nombre maximal d'adaptations. Une idée serait de procéder à un nombre élevé d'adaptations (par exemple 10 adaptations ou plus si nécessaire) et d'analyser les résultats obtenus afin notamment de voir si le processus converge à un certain moment ou s'il y a détérioration de la solution. Cette analyse donnerait des orientations sur le choix d'un critère de convergence. D'un autre côté, les tailles minimales et maximales des maillages adaptés n'apparaissent pas souvent dans les mêmes zones du modèle. Ceci fait qu'un rapport de tailles global ne reflète pas la réalité dans une zone d'intérêt (où le raffinement a lieu). Une alternative potentielle serait de calculer le gradient de taille localement, en particulier dans la zone à l'interface matière-void, et de limiter sa variation. Le cas échéant, un seuillage de ce dernier pourrait servir de critère de convergence.

Par ailleurs, le gradient de taille, combiné ou à la place de la densité seuil ρ_{seuil} , pourrait également être utilisé comme paramètre d'extraction de la forme optimisée. En fait, attendu que seule la frontière structurelle est raffinée, la variation de la taille ne sera effective qu'à cette dernière, ce qui donnerait une bonne indication de la limite à considérer pour les éléments à conserver dans la forme optimisée et ceux à ne pas considérer.

6.2.3 Autres processus d'adaptation

La méthode SIMP adaptative développée passe par un remaillage du modèle entier. On part d'une optimisation, l'on calcule le gradient de densité et le modèle entier est remaillé en s'appuyant sur la fonction d'adaptation. Deux améliorations éventuelles

seraient de ne pas remailler tout le modèle ou alors de partir du premier résultat d'optimisation.

6.2.3.1 Remaillage partiel du modèle

La méthode SIMP adaptative proposée adapte le maillage en fonction du résultat de la SIMP précédente. Pour chaque adaptation, le modèle est entièrement remaillé pour notamment éviter des opérations supplémentaires de traitement des éléments dégradés à cause de la suppression ou de l'inclusion locale d'autres éléments. En sortant de ce contexte, il serait possible de ne supprimer que la portion du maillage dans la zone et au voisinage des frontières structurelles, étant donné que c'est principalement dans ces zones que le gradient de densité varie. Toutefois, il est à noter que pour prendre en compte le déraffinement, ce remaillage partiel devrait être effectué après la première adaptation (2^e SIMP), puisque le maillage initial (1^{er} SIMP) est uniforme.

6.2.3.2 Projection du résultat de l'optimisation

Sachant que l'optimisation adaptative vise à améliorer la qualité du résultat optimisé et non à créer un nouveau résultat ou à modifier la solution initiale, il serait légitime après le maillage du modèle adapté de projeter le résultat de la première SIMP sur le nouveau maillage et de considérer ce dernier comme point de départ pour la SIMP suivante. Aussi, un calcul du gradient de densité pourrait s'effectuer après un nombre fixé d'itérations d'optimisation. On aboutirait à un seul processus global d'optimisation au cours duquel se seront opérées plusieurs adaptations. Cette stratégie a été appliquée avec succès par certains auteurs, mais sur des modèles 2D et sans déraffinement [80]. Elle permettrait entre autres un gain de temps comparativement à l'application de la méthodologie dans son état actuel.

6.2.3.3 *Contrainte sur la prescription de tailles*

Le processus d'adaptation proposé calcule le gradient de la densité de matière à partir du résultat de la méthode SIMP, puis l'utilise pour prescrire une carte de taille à l'aide de la fonction d'adaptation. Plus encore, les zones d'intérêt sont déterminées après la première optimisation (SIMP 1, avec un maillage uniforme) et ne varient pas au fil des adaptations comme nous l'avons mentionné à la section 3.4. Ainsi, pour une zone d'intérêt donnée, il pourrait être pertinent de contraindre la prescription de tailles ainsi qu'il suit : si la taille prescrite pour l'adaptation suivante est plus petite que la taille lors de l'adaptation précédente, alors on conserve cette prescription. Dans le cas contraire, autrement dit si la taille prescrite pour l'adaptation suivante est plus grande que la taille de l'adaptation précédente, alors on conserve plutôt la taille précédente pour la nouvelle prescription. Ce principe pourrait être appliqué simultanément ou séparément avec une borne inférieure de la taille des éléments (choisie par exemple sous forme d'un pourcentage de la taille du maillage uniforme initial d_g) afin que la taille minimale d'un élément sur le maillage ne soit pas inférieure à cette valeur fixée. Ceci permettrait éventuellement d'avoir plus de contrôle sur la gradation des tailles des éléments du maillage adapté.

6.2.4 **Post-traitement du squelette**

Le processus de conversion du modèle optimisé adapté proposé inclut une étape de normalisation qui transforme la courbe-squelette initiale en un ensemble de poutres droites. Ce faisant, l'on peut aboutir à des configurations comme celle présentée sur la Figure 6-4c, qui n'est pas représentative du modèle optimisé (Figure 6-4b).

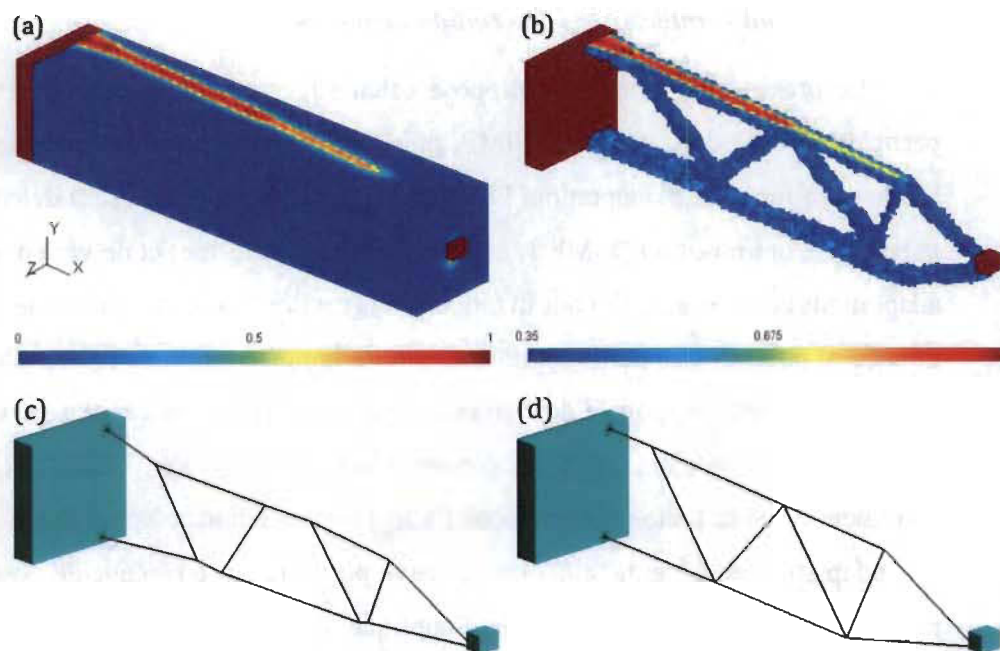


Figure 6-4 : (a), (b) Répartitions optimales de la densité de matière après la SIMP et squelette normalisé (c) avant et (d) après modification.

Du fait de la mauvaise définition du squelette dans les points de jonction, on obtient bien plus de poutres droites que ne propose le modèle optimisé. Ceci suggère l'intégration d'un post-traitement automatique du squelette dans la présente approche. Ce dernier permettrait de fusionner certains nœuds, ce qui revient à supprimer certaines poutres, ou alors à combiner plusieurs poutres distinctes en une seule poutre droite lorsque le modèle s'y prête [7]. Cela est illustré sur la Figure 6-4d où des modifications ont été apportées manuellement.

6.2.5 Mini-poutres uniquement dans le cercle de l'interface

La validation du modèle converti dans cette étude est effectuée par un calcul mixte 1D-3D. Le squelette est raccordé au *non-design* en créant des mini-poutres sur toute l'interface entre la partie optimisée et celle non optimisée. La forme de cette interface, en d'autres termes la forme de la zone recouverte par les mini-poutres, est donc quelconque.

Afin de mieux refléter la réalité, il faudrait disposer des mini-poutres uniquement à l'intérieur de l'empreinte circulaire créée par la poutre cylindrique sur la partie volumique lors du raccordement. Cependant, ce désir de précision nécessiterait la modification du maillage à cette interface de contact pour prendre en compte le profil de la section.

6.2.6 Lissage adapté à l'optimisation topologique

Comme mentionné plusieurs fois dans ce document, l'irrégularité de l'enveloppe de la forme optimisée est particulière, car elle provient du processus de suppression (désactivation) des éléments afin de ne conserver que ceux qui contribuent le plus à la rigidité du modèle. L'application des méthodes traditionnelles de lissage (voir sous-section 2.8.2) a révélé certaines limites à leur champ d'application. Le traitement des résultats d'optimisation topologique requiert donc le développement d'une méthode de lissage spécifiquement adaptée à ce type de résultats. La combinaison d'un lissage de type *Laplacien* et d'un lissage qui conserve ou crée les arêtes saillantes serait une piste intéressante à explorer notamment dans le but de la conversion en modèle CAO.

6.2.7 Squelettisation adaptée à l'optimisation topologique

La méthodologie de conversion développée est un enchainement du lissage, de la squelettisation, de la normalisation et se termine par une validation. Dès lors, le modèle converti dépend principalement du squelette obtenu. La position de ce dernier à l'intérieur de l'enveloppe du modèle influence la compliance du modèle converti. En effet, la squelettisation utilisée dans ce travail est basée sur le nuage de points de l'enveloppe de la forme optimisée qui est contractée en utilisant le *Laplacien*. Il en résulte un squelette non centré qui dans certains cas sort de l'enveloppe du modèle (voir Figure 6-5). Une méthode de squelettisation qui assure le centrage du squelette constitue une perspective non négligeable de travaux futurs. Cette méthode pourrait notamment élaguer de manière itérative le modèle optimisé adapté jusqu'à obtenir les éléments de son squelette. En procédant de la sorte, l'on conserverait les informations sur la position de la surface

initialement et s'assurait que le squelette est bien l'intérieur du modèle. Ceci améliorerait la forme du squelette, le rayon des sections des poutres et par conséquent la compliance du modèle converti.

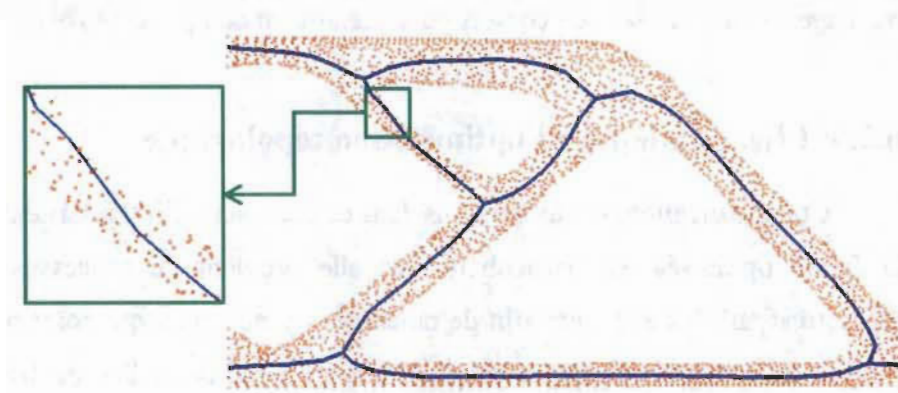


Figure 6-5 : Illustration du nuage de points d'une enveloppe et du squelette obtenu.

6.2.8 Importation du modèle converti dans un logiciel de CAO

Le modèle converti obtenu en utilisant l'approche proposée dans ce travail comprend un ensemble de poutres provenant de la partie optimisée et une partie volumique provenant du *non-design* (voir Figure 6-1d). Aucune validation topologique du modèle CAO construit afin notamment de s'assurer que tous les contours des faces sont fermés et ne s'auto-intersectent pas n'a pas été effectuée. Ce genre d'opération, pouvant s'effectuer à l'aide d'un logiciel ou en appliquant des approches similaires à celle proposée par [61], permettrait d'obtenir le modèle CAO converti sous forme d'un B-REP topologiquement valide que l'on ramènerait dans un logiciel de CAO notamment pour une édition subséquente.

6.2.9 Conversion en modèles CAO des modèles optimisés volumiques

Dans ce document nous avons présenté une méthode de conversion en modèles CAO appropriée aux formes optimisées s'orientant vers des structures de poutres. La validation du modèle converti utilise également l'avantage d'une étude

multidimensionnelle avec des éléments 1D et 3D. Partant de ces faits, la stratégie proposée ne saurait être appliquée à des formes optimisées s'orientant vers des structures volumiques (voir illustration Figure 4-1). Il pourrait donc être pertinent de développer une nouvelle approche complémentaire ou plus englobante permettant l'interprétation de ces dernières en modèles CAO. Cette stratégie pourrait, par exemple à travers l'analyse des résultats obtenus après plusieurs tests sur différents modèles, commencer par trouver un critère ou un seuil sur la fraction volumique f permettant la séparation entre les résultats s'orientant vers des structures de poutres (valeur de f faible) et celles s'orientant vers des structures volumiques (valeur de f élevée). La validation de ce modèle volumique consisterait au maillage puis à l'analyse en utilisant des éléments finis 3D tétraédriques. Une analyse plus poussée et une comparaison pourraient être effectuées au niveau de la répartition des contraintes dans le modèle volumique converti et dans le modèle lissé, similairement aux travaux effectués par [17].

LISTE DES CONTRIBUTIONS SCIENTIFIQUES

Articles de journaux

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *Automatic reconstruction of beam structures from 3D topology optimization results*. Publié dans la revue internationale Computers and Structures, 189 (2017) : 62-82

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *Towards adaptive topology optimization*. Publié dans la revue internationale Advances in Engineering Software, 100 (2016) : 290-307

Jean-Christophe Cuillière, Vincent François, Alexandre Nana. *Automatic construction of structural CAD models from 3D topology optimization*. Publié dans la revue internationale Computer-Aided Design and Applications, 15 (2018) : 107-121

Articles de conférences avec comité de lecture

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *From topology optimization results to beam structures*. European Conference on Design, Modeling and Optimization (ECDMO) 2017, 15-17 février 2017, Paris, France

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *Structural topology optimization with adaptive mesh refinement and de-refinement*. 25th Canadian Congress of Applied Mechanics (CANCAM 2015) May 31 – June 4, 2015, London, Ontario, Canada

Jean-Christophe Cuillière, Vincent François, Alexandre Nana. *Automatic construction of structural CAD models from 3D topology optimization*. 14th annual International CAD Conference, 10-12 août 2017, Okayama, Japon. **2017 CAD conference and exhibition best paper award**

Vincent François, Jean-Christophe Cuillière, Alexandre Nana. *Reconstruction automatique et validation de structures 3D optimisées topologiquement*. 13^e Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2017), 15-19 mai 2017, Presqu'île de Giens (Var), France

Vincent François, Jean-Christophe Cuillière, Alexandre Nana. *Optimisation de topologie adaptative*. 12^e Colloque National en Calcul des Structures (CSMA 2015), 18-22 mai 2015, Presqu'île de Giens (Var), France

Affiches scientifiques

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *Automatisation de la conception mécanique par optimisation topologique*. Concours d'affiches scientifiques des 22 et 23 mars 2016 au CAPS UQTR, Trois-Rivières, Québec

Alexandre Nana, Jean-Christophe Cuillière, Vincent François. *Conception de pièces mécaniques par optimisation topologique*. Concours d'affiches scientifiques des 25 et 26 mars 2015 au CAPS UQTR, Trois-Rivières, Québec

Activités de vulgarisation

Alexandre Nana. *Automatisation de la conception de pièces et structures par optimisation topologique*. 84^e Congrès de l'ACFAS, 9 – 13 mai 2016 à l'UQAM, Montréal

Alexandre Nana. *Vers l'automatisation de la conception de pièces et structures*. **2^e prix à Ma thèse en 180s**, ATRIUM C.E.U UQTR, 2 avril 2015, Trois-Rivières

Alexandre Nana. *Conception de pièces et structures mécaniques par optimisation topologique*. 7^e Colloque multidisciplinaire des cycles supérieurs de l'AGE, 12 mars 2015, UQTR, Trois-Rivières

Alexandre Nana. *Les ingénieurs sont-ils les designers de demain ?* Interview dans le journal universitaire Zone Campus, 10 décembre 2014, UQTR, Trois-Rivières

Organisation de colloque

Président du comité d'organisation du 8^e Colloque Multidisciplinaire des Cycles Supérieurs (CMCS) de l'AGE (Association Générale des Étudiants) UQTR, 10 mars 2016, UQTR, Trois-Rivières. Thème : *Chercher, Innover, Réaliser*.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. P. Bendsoe, and O. Sigmund, "Topology optimization - Theory, Methods and Applications," *2nd ed.*, Berlin: Springer, 2003.
- [2] M. Zhou, R. Fleury, S. Patten, N. Stannard, D. Mylett, and S. Gardner, "Topology Optimization - Practical Aspects for Industrial Applications," *Proceedings of the 9th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, Shizuoka, Japan, 2011.
- [3] J. Liu, and Y. Ma, "A survey of manufacturing oriented topology optimization methods," *Advances in Engineering Software*, vol. 100, pp. 161-175, 2016.
- [4] M. P. Bendsoe, and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 71, no. 2, pp. 197-224, 1988.
- [5] K. Suzuki, and N. Kikuchi, "A homogenization method for shape and topology optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 93, no. 3, pp. 291-318, 1991.
- [6] P. Y. Papalambros, and M. Chirehdast, "An integrated environment for structural configuration design," *Journal of Engineering Design*, vol. 1, no. 1, pp. 73-96, 1990.
- [7] M. Bremicker, M. Chirehdast, N. Kikuchi, and P. Papalambros, "Integrated Topology and Shape Optimization in Structural Design*," *Journal of Structural Mechanics*, vol. 19, no. 4, pp. 551-587, 1991.
- [8] M. Chirehdast, H.-C. Gea, N. Kikuchi, and P. Papalambros, "Structural configuration examples of an integrated optimal design process," *Journal of Mechanical Design*, vol. 116, no. 4, pp. 997-1004, 1994.
- [9] C.-É. Caron, "Mémoire de Maîtrise : Maillage de sous-domaines de désign pour l'optimisation de la topologie de structures mécaniques," *Université de Sherbrooke*, Sherbrooke, 2007.
- [10] J.-C. Cuilliere, G.-P. Picher-Martel, V. François, and J.-M. Drouet, "Integration of topology optimization into the CAD process," *Proceedings of the 2010 CSME Forum*, Victoria, BC, June 7-9, 2010.

- [11] G.-P. Picher-Martel, "Mémoire de Maîtrise : Intégration d'une méthode d'optimisation topologique dans le processus de CAO/FAO pour des pièces tridimensionnelles," *Université de Sherbrooke*, Sherbrooke, 2010.
- [12] J.-C. Cuillière, V. François, and J.-M. Drouet, "Automatic mesh generation and transformation for topology optimization methods," *Computer-Aided Design*, vol. 45, no. 12, pp. 1489-1506, 2013.
- [13] J. C. Cuillière, and V. Francois, "Integration of CAD, FEA and Topology Optimization through a Unified Topological Model," *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 11, no. 5, pp. 1-15, 2014.
- [14] J.-C. Cuillière, V. Francois, and J.-M. Drouet, "Towards the Integration of Topology Optimization into the CAD Process " *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 11, no. 2, pp. 120-140, 2014.
- [15] A. Nana, J.-C. Cuillière, and V. Francois, "Towards adaptive topology optimization," *Advances in Engineering Software*, vol. 100, pp. 290-307, 2016.
- [16] A. Nana, J.-C. Cuillière, and V. Francois, "Automatic reconstruction of beam structures from 3D topology optimization results," *Computers & Structures*, vol. 189, pp. 62-82, 2017.
- [17] J.-C. Cuillière, V. François, and A. Nana, "Automatic construction of structural CAD models from 3D topology optimization," *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 15, no. 1, pp. 107-121, 2018.
- [18] G. I. N. Rozvany, "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, no. 2, pp. 90-108, 2001.
- [19] J. D. Deaton, and R. V. Grandhi, "A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 49, no. 1, pp. 1-38, 2014.
- [20] G. Allaire, and R. V. Kohn, "Topology Optimization and Optimal Shape Design Using Homogenization," *Topology Design of Structures, NATO ASI Series*, vol. 227, pp. 207-218, 1993.
- [21] Y. M. Xie, and G. P. Steven, "Simple evolutionary procedure for structural optimization," *Computers and Structures*, vol. 49, no. 5, pp. 885-896, 1993.
- [22] O. M. Querin, V. Young, G. P. Steven, and Y. M. Xie, "Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189 pp. 559-573, 2000.

- [23] M. P. Bendsoe, and O. Sigmund, "Material interpolation schemes in topology optimization," *Archive of Applied Mechanics*, vol. 69, pp. 635-654, 1999.
- [24] O. Sigmund, "A 99 line topology optimization code written in Matlab," *Struct. Multidisc. Optim.*, vol. 21, pp. 120-127, 2001.
- [25] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader, "A level-set method for shape optimization," *Comptes Rendus Mathematique*, vol. 334, no. 12, pp. 1125-1130, 2002.
- [26] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo, "A level set method for structural topology optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, no. 1-2, pp. 227-246, 2003.
- [27] M.-H. Hsu, and Y.-L. Hsu, "Interpreting three-dimensional structural topology optimization results," *Computers & Structures*, vol. 83, no. 4-5, pp. 327-337, 2005.
- [28] G. Allaire, Z. Belhachmi, and F. Jouve, "The homogenization method for topology and shape optimization. Single and multiple loads case," *Revue Europeenne des Elements*, vol. 5, no. 5-6, pp. 649-672, 1996.
- [29] Y. M. Xie, X. Y. Yang, Q. Q. Liang, G. P. Steven, and O. M. Querin, "Evolutionary structural optimization," *Recent Advances in Optimal Structural Design*, pp. 125, 2002.
- [30] O. M. Querin, G. P. Steven, and Y. M. Xie, "Evolutionary structural optimisation (ESO) using a bidirectional algorithm," *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, vol. 15, no. 8, pp. 1031-1048, 1998.
- [31] V. Young, O. M. Querin, G. P. Steven, and Y. M. Xie, "3D and multiple load case bi-directional evolutionary structural optimization (BESO)," *Structural Optimization*, vol. 18, no. 2-3, pp. 183-192, 1999.
- [32] M. Zhou, and G. I. N. Rozvany, "On the validity of ESO type methods in topology optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, pp. 80-83, 2001.
- [33] H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev, and A. Schumacher, "Bubble method for topology and shape optimization of structures," *Structural Optimization*, vol. 8, no. 1, pp. 42-51, 1994.
- [34] G. Allaire, "Topology Optimization with the Homogenization and the Level-Set Methods," *NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry*, vol. 170, pp. 1-13, 2005.

- [35] N. P. Van Dijk, K. Maute, M. Langelaar, and F. van Keulen, "Level-set methods for structural topology optimization: a review," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 48, no. 3, pp. 437-472, 2013.
- [36] O. Sigmund, and J. Petersson, "Numerical instabilities in topology optimization : A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima," *Structural Optimization*, vol. 16, pp. 68-75, 1998.
- [37] A. Koguchi, and N. Kikuchi, "A surface reconstruction algorithm for topology optimization," *Engineering with Computers*, vol. 22, no. 1, pp. 1-10, 2006.
- [38] J.-C. Cuillière, V. Francois, and J.-M. Drouet, "Automatic mesh generation and transformation for topology optimization methods," *Computer-Aided Design*, vol. 45, pp. 1489-1506, 2013.
- [39] M. Victoria, O. M. Querin, and P. Martí, "Topology design of three-dimensional continuum structures using isosurfaces," *Advances in Engineering Software*, vol. 42, no. 9, pp. 671-679, 2011.
- [40] K. Maute, and E. Ramm, "Adaptive topology optimization," *Structural Optimization*, vol. 10, no. 2, pp. 100-112, 1995.
- [41] S.-K. Youn , and S.-H. Park, "A study on the shape extraction process in the structural topology optimization using homogenized material," *Computers and Structures*, vol. 62, no. 3, pp. 527-538, 1997.
- [42] M.-S. Hsu, Y.-L. Hsu, and C.-T. Chen, "Interpreting results from topology optimization using density contours," *Computers & Structures*, vol. 79, pp. 1049-1058, 2001.
- [43] M. E. Mortenson, "Geometric Modeling," *New York: Industrial Press*, 2006.
- [44] Y. Sun, D. L. Page, J. K. Paik, and A. M. A. Koschan A., "Triangle mesh based edge detection and its application to surface segmentation and adaptive surface smoothing," *IEEE international conference on image processing, Rochester NY*, vol. 3, pp. 825-828, 2002.
- [45] D. L. Page, Y. Sun, J. Paik, A. F. Koschan, and M. A. Abidi, "Normal Vector Voting: Crease Detection and Curvature Estimation on Large, Noisy Meshes," *Graphical Models*, vol. 64, pp. 199-229, 2002.
- [46] Dassault, "Abaqus - User's Manual," *Dassault Systèmes*, 2011.

- [47] P.-S. Tang, and K.-H. Chang, "Integration of topology and shape optimization for design of structural components," *Journal of Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 22, pp. 65-82, 2001.
- [48] K.-H. Chang, and P.-S. Tang, "Integration of design and manufacturing for structural shape optimization," *Advances in Engineering Software*, vol. 32, pp. 555-567, 2001.
- [49] S. Larsen , and G. Jensen, "Converting Topology Optimization Results into Parametric CAD Models," *Computer-Aided Design and Applications*, vol. 6, no. 3, pp. 407-418, 2009.
- [50] C.-Y. Lin, and L.-S. Chao "Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 20, pp. 125-137, 2000.
- [51] W. R. Blattman, "Master of Science Thesis : Generating CAD Parametric Features Based on Topology Optimization Results," *Brigham Young University*, Provo, Utah, 2008.
- [52] Y.-H. Chou, and C.-Y. Lin, "Improved image interpreting and modeling technique for automated structural optimization system," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 40, no. 1-6, pp. 215-226, 2010.
- [53] T. Varady, R. R. Martin, and J. Cox, "Reverse engineering of geometric models-an introduction," *Computer-Aided Design*, vol. 29, no. 4, pp. 255-268, 1997.
- [54] P. Benko, R. R. Martin, and T. Varady, "Algorithms for reverse engineering boundary representation models," *Computer-Aided Design*, vol. 33, pp. 839-851, 2001.
- [55] J. Wang, D. Gu, Z. Yu, C. Tan, and L. Zhou, "A framework for 3D model reconstruction in reverse engineering," *Computers and Industrial Engineering*, vol. 63, no. 4, pp. 1189-1200, 2012.
- [56] P. Benkő, and T. Várady, "Segmentation methods for smooth point regions of conventional engineering objects," *Computer-Aided Design*, vol. 36, no. 6, pp. 511-523, 2004.
- [57] A. Shamir, "A survey on mesh segmentation techniques," *Computer Graphics Forum*, vol. 27, no. 6, pp. 1539-1556, 2008.

- [58] S. Sellamani, R. Muthuganapathy, Y. Kalyanaraman, S. Murugappan, M. Goyal, K. Ramani, and C. M. Hoffmann, "PCS: Prominent Cross-Sections for Mesh Models," *Computer-Aided Design & Applications*, vol. 7, no. 4, pp. 601-620, 2010.
- [59] M. Goyal, S. Sellamani, C. Piya, W. Benjamin, Y. Fan, M. Liu, and K. Ramani, "Towards locally and globally shape-aware reverse 3D modeling," *Computer-Aided Design*, vol. 44, pp. 537-553, 2012.
- [60] J. Wang, D. Gu, Z. Gao, Z. Yu, C. Tan, and L. Zhou, "Feature-Based Solid Model Reconstruction," *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, vol. 13, no. 1, 2013.
- [61] R. B  ni  re, G. Subsol, G. Gesqu  re, F. Le Breton, and W. Puech, "A comprehensive process of reverse engineering from 3D meshes to CAD models," *Computer-Aided Design*, vol. 45, no. 11, pp. 1382-1393, 2013.
- [62] J. Brennan, "Integrating Optimization into the Design Process," *Proceedings of the Altair HyperWorks Technology Showcase*, 1999.
- [63] M. Zhou, R. Fleury, Y. K. Shyy, H. Thomas, and J. M. Brennan, "Progress in topology optimization with manufacturing constraints," *9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, 2002.
- [64] W. Saleem , and F. Yuqing, "Strategy for Optimal Configuration Design of Existing Structures by Topology and Shape Optimization Tools," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 37, pp. 1058-1066, 2010.
- [65] R. J. Banchak, "Topology Optimization – Driven Design, Development for Automotive Components," *Automotive Simulation World Congress*, 2012.
- [66] M. Zhou, Y. K. Shyy, and H. L. Thomas, "Checkerboard and minimum member size control in topology optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 21, no. 2, pp. 152–158, 2001.
- [67] D. Brackett, I. Ashcroft, and R. Hague, "Topology Optimization for Additive Manufacturing," *22nd Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, pp. 348–362, 2011.
- [68] P.-T. Doutre, T. H. Vo, P. Marin, F. Pourroy, G. Prudhomme, and F. Vignat, "Optimisation topologique: outil cl   pour la conception des pièces produites par fabrication additive?," *14  me Colloque National AIP PRIMECA*, 2015.
- [69] OptiStruct, Topology Optimization Software, *Altair Engineering Inc.*, Troy, Michigan, 2008.

- [70] <http://www.topology-opt.com/software-list/>.
- [71] P. Allinger, "The TOSCA Topology Optimisation - Mesh Adaption and Manufacturing Restrictions," *FE-Design GmbH*, 2001.
- [72] H. Blum "A Transformation for Extracting New Descriptions of Shape," *Models for the Perception of Speech and Visual Form*, MIT Press, Boston, USA, pp. 362-380, 1967.
- [73] N. D. Cornea, D. Silver, and P. Min, "Curve-skeleton properties, applications, and algorithms," *IEEE Transactions on Visualization & Computer Graphics*, no. 3, pp. 530-548, 2007.
- [74] P. J. Frey, and P.-L. George, "Mesh generation : Application to finite elements," *London : ISTE*, 2008.
- [75] J. C. Arantes Costa Jr, and M. K. Alves, "Layout optimization with h-adaptivity of structures," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 58, no. 1, pp. 83-102, 2003.
- [76] M. K. Alves, J. C. A. Costa, and H. A. Al-Qureshi, "A stress based h-adaptive topology optimization method," *Proceedings of the COBEM 2005: 18 th International Congress of Mechanical Engineering*, 2005.
- [77] R. Stainko, "An adaptive multilevel approach to the minimal compliance problem in topology optimization," *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 22, no. 2, pp. 109-118, 2006.
- [78] E. De Sturler, G. H. Paulino , and S. Wang, "Topology optimization with adaptive mesh refinement," *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures*, 2008.
- [79] S. Wang, E. de Sturler, and G. H. Paulino, "Dynamic adaptive mesh refinement for topology optimization," *International Journal of Numerical Methods*, vol. 69, pp. 2441-2468, 2008.
- [80] M. Bruggi, and M. Verani, "A fully adaptive topology optimization algorithm with goal-oriented error control," *Computers and Structures*, vol. 89, no. 15-16, pp. 1481-1493, 2011.
- [81] Y. Wang, Z. Kang, and Q. He, "Adaptive topology optimisation with independent error control for seperated displacement and density fields," *Computers and Structures*, vol. 135, pp. 50-61, 2014.

- [82] Y. Wang, Z. Kang, and Q. He, "An adaptive refinement approach for topology optimization based on separated density field description," *Computers & Structures*, vol. 117, pp. 10-22, 2013.
- [83] C. Y. Lin, and J. N. Chou, "A two-stage approach for structural topology optimization," *Advances in Engineering Software*, vol. 30, no. 4, pp. 261-271, 1999.
- [84] A. Aremu, I. Ashcroft, R. Wildman, R. Hague, C. Tuck, and D. Brackett, "A hybrid algorithm for topology optimization of additive manufactured structures," *Proceedings of the 22nd Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, pp. 279-289, 2011.
- [85] X. B. Duan, F. F. Li, and X. Q. Qin, "Adaptive mesh method for topology optimization of fluid flow," *Applied Mathematics Letters*, vol. 44, pp. 40-44, 2015.
- [86] G. Taubin, T. Zhang, and G. Golub, "Optimal Surface Smoothing as Filter Design," *Fourth European Conference on Computer Vision*, IBM Technical Report RC-20404, 1996.
- [87] D. A. Field, "Laplacian smoothing and Delaunay triangulations," *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 4, no. 6, pp. 709-712, 1988.
- [88] G. Taubin, "Curve and surface smoothing without shrinkage," *Proceedings, Fifth International Conference on Computer Vision*, pp. 852-857, 1995.
- [89] M. Desbrun, M. Meyer, P. Schröder, and A. H. Barr, "Implicit Fairing of Irregular Meshes using Diffusion and Curvature Flow," *SIGGRAPH 99 Conference Proceedings*, pp. 317-324, 1999.
- [90] J. Vollmer, R. Mencl, and H. Müller, "Improved Laplacian Smoothing of Noisy Surface Meshes," *EUROGRAPHICS 99 Conference Proceedings*, pp. 131-138, 1999.
- [91] X. Liu, H. Bao, P. Heng, T. Wong, and Q. Peng, "Constrained fairing for meshes," *Computer Graphics Forum*, vol. 20, no. 2, pp. 115-123, 2001.
- [92] Z. Ji, L. Liu, and G. Wang, "A Global Laplacian Smoothing Approach with Feature Preservation," *CAD-CG '05 Proceedings of the Ninth International Conference on Computer Aided Design and Computer Graphics*, pp. 269-274, 2005.
- [93] Y. Ohtake, A. Belyaev, and I. Bogaevski, "Mesh regularization and adaptive smoothing," *Computer Aided Design*, vol. 33, pp. 789-800, 2001.

- [94] M. Wei, W. Shen, J. Qin, J. Wu, T.-T. Wong, and P.-A. Heng, "Feature-preserving optimization for noisy mesh using joint bilateral filter and constrained Laplacian smoothing," *Optics and Lasers in Engineering*, vol. 51, no. 11, pp. 1223–1234, 2013.
- [95] B. Clark, N. Ray, and X. Jiao, "Surface Mesh Optimization, Adaption, and Untangling with High-Order Accuracy," *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, pp. 385-402, 2013.
- [96] M. Meyer, M. Desbrun, P. Schröder, and A. H. Barr, "Discrete differential-geometry operators for triangulated 2-manifolds," *In Visualization and Mathematics III*, pp. 113-134, 2002.
- [97] C.-Y. Chen, and K.-Y. Cheng, "A sharpness dependent filter for mesh smoothing," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 22, pp. 376-391, 2005.
- [98] C.-Y. Chen, and K.-Y. Cheng, "A direction-oriented sharpness dependent filter for 3D polygon meshes," *Computers & Graphics*, vol. 32, no. 2, pp. 129-140, 2008.
- [99] S. Fleishman, I. Drori, and D. Cohen-Or, "Bilateral mesh denoising," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 22, no. 3, pp. 950-953, 2003.
- [100] A. Tagliasacchi, T. Delame, M. Spagnuolo, N. Amenta, and A. Telea, "3D skeletons: A state-of-the-art report," *Computer Graphics Forum*, vol. 35, no. 2, pp. 573-597, 2016.
- [101] H. Du, and H. Qin, "Medial Axis Extraction and Shape Manipulation of Solid Objects using Parabolic PDEs," *Proceedings of the ninth ACM Symposium on Solid Modeling and Applications*, Genova, Italy, 2004.
- [102] K. Palágyi ; <http://www.inf.u-szeged.hu/~palagyi/skel/skel.html>.
- [103] R. C. Tam, and H. Wolfgang, "Feature-Preserving Medial Axis Noise Removal," *Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision-Part II*, pp. 672-686, 2002.
- [104] O. K.-C. Au, C.-L. Tai, H.-K. Chu, D. Cohen-Or, and T.-Y. Lee, "Skeleton extraction by mesh contraction," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 27, no. 3, p. 44, 2008.
- [105] J. Cao, A. Tagliasacchi, M. Olson, H. Zhang, and Z. Su, "Point cloud skeletons via laplacian based contraction," *Shape Modeling International Conference (SMI) IEEE*, pp. 187-197, 2010.

- [106] A. Rosenfeld, and J. L. Pfaltz, "Distance functions on digital pictures," *Pattern Recognition*, vol. 1, no. 1, pp. 33-61, 1968.
- [107] D.-T. Lee, "Medial axis transformation of a planar shape," *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, no. 4, pp. 363-369, 1982.
- [108] D. Brunner, and G. Brunnett, "Mesh segmentation using the object skeleton graph," *Computer Graphics and Imaging*, pp. 48-55, 2004.
- [109] S. Delest, R. Boné , and H. Cardot, "Hierarchical Mesh Segmentation Using Waterfall and Dynamics," *Proceedings of the 5th International Symposium on image and Signal Processing and Analysis*, 2007.
- [110] R. Raab , C. Gotsman, and A. Sheffer, "Virtual woodworks : Making toys from geometric models," *International Journal of Shape Modeling*, vol. 10, no. 1, pp. 1-30, 2004.
- [111] W. R. Quadros, S. J. Owen, M. Brewer, and K. Shimada, "Finite Element Mesh Sizing for Surfaces Using Skeleton," *International Meshing Roundtable - IMR*, pp. 389-400, 2004.
- [112] T. K. Dey, and J. Sun, "Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function," *Symposium on geometry processing*, pp. 143-152, 2006.
- [113] C.-M. Ma, S.-Y. Wan, and H.-K. Chang, "Extracting medial curves on 3D images," *Pattern Recognition Letters*, vol. 23, no. 8, pp. 895-904, 2002.
- [114] A. Telea, and A. C. Jalba, "Computing curve skeletons from medial surfaces of 3D shapes," in *Proceedings of the Theory and Practice of Computer Graphics (TPCG) conference*, 2012.
- [115] A. Tagliasacchi, H. Zhang, and D. Cohen-Or, "Curve skeleton extraction from incomplete point cloud," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 28, no. 3, p. 71, 2009.
- [116] A. Sobiecki, H. C. Yasan, A. C. Jalba, and A. C. Telea, "Qualitative comparison of contraction-based curve skeletonization methods," *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, pp. 425-439, Springer, 2013.
- [117] H. Sundar, D. Silver, N. Gagvani, and S. Dickinson, "Skeleton based shape matching and retrieval," *IEEE Shape Modeling International*, pp. 130-139, 2003.
- [118] V. Francois, and J.-C. Cuillière, "A Unified Topological Model (UTM) for automatic finite element mesh generation," *Revue d'Ingénierie Numérique Collaborative*, vol. 4, 2009.

- [119] P. J. Frey, and P.-L. George, "Maillages applications aux elements finis," *Hermès Science Publications*, 1999.
- [120] J.-C. Cuilliere, V. François, and J.-M. Drouet, "Automatic 3D Mesh Generation of Multiple Domains for Topology Optimization Methods," in *Proceedings of the 21st International Meshing Roundtable*, San Jose, CA, 2012.
- [121] V. François, "Méthodes de maillage et de remaillage automatiques appliquees à la modification de modèle dans le contexte de l'ingenierie simultanée," *Universite Henri Poincare*, Nancy 1, 1998.
- [122] V. Francois, and J.-C. Cuilliere, "An a priori adaptive 3D advancing front mesh generator integrated to solid modeling," *Recent Advances in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering*, pp. 337-346, 2003.
- [123] O. Sigmund, "Doctoral dissertation : Design of Materials Structures Using Topology Optimization," *Technical University of Denmark*, 1994.
- [124] T. E. Bruns, "A reevaluation of the SIMP method with filtering and an alternative formulation for solid-void topology optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 30, pp. 428-436, 2005.
- [125] J. Petersson, "Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 171, no. 1-2, pp. 123-140, 1999.
- [126] O. Sigmund, "Morphology-based black and white filters for topology optimization," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 33, no. 4-5, pp. 401-424, 2007.
- [127] O. Sigmund, "Design of material structures using topology optimization," in *Proceedings of the 1st World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization (WCSMO-1)*, 1995.
- [128] A. Aremu, I. Ashcroft, R. Hague, R. Wildman, and C. Tuck, "Suitability of SIMP and BESO topology optimization algorithms for additive manufacture," *21st Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium*, pp. 679-692, 2010.
- [129] E. Ramm, K. Maute, and S. Schwarz, "Adaptive topology and shape optimization," *Computational Mechanics, New Trends and Applications*, Barcelona, Spain, 1998.
- [130] J.-C. Cuillère, "Introduction à la méthode des éléments finis," *Paris: Éditions Dunod*, 2011.

- [131] A. R. Díaz, and B. Belding, "On Optimum Truss Layout by a Homogenization Method," *Journal of Mechanical Design*, vol. 115, no. 3, pp. 367-373, 1993.
- [132] J. Liu, and Y.-S. Ma, "3D level-set topology optimization: a machining feature-based approach," *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 52, no. 3, pp. 563-582, 2015.
- [133] J.-C. Craveur, and D. Marceau, "De la CAO au calcul," *Paris: Dunod*, 2001.
- [134] S. Bournival, J.-C. Cuillière, and V. François, "A mesh-geometry based method for coupling 1D and 3D elements," *Advances in Engineering Software*, vol. 41, no. 6, pp. 838-858, 2010.
- [135] Code Aster ; <http://www.code-aster.org/>.
- [136] OpenCascade ; <http://www.opencascade.org/>.
- [137] C. Geuzaine, and J.-F. Remacle, "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 79, no. 11, pp. 1309-1331, 2009.
- [138] Z. Kang, and Y. Wang, "Structural topology optimization based on non-local Shepard interpolation of density field," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, no. 49-52, pp. 3515-3525, 2011.
- [139] X. Huang, Y. M. Xie, and M. C. Burry, "Advantages of bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) over evolutionary structural optimization (ESO)," *Advances in Structural Engineering*, vol. 10, no. 6, pp. 727-737, 2007.
- [140] H. Li, P. Li, L. Gao, L. Zhang, and T. Wu, "A level set method for topological shape optimization of 3D structures with extrusion constraints," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 283, pp. 615-635, 2015.
- [141] M. Zhou, B. S. Lazarov, F. Wang, and O. Sigmund, "Minimum length scale in topology optimization by geometric constraints," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 293, pp. 266-282, 2015.
- [142] A. N. Christiansen, J. A. Bærentzen, M. Nobel-Jørgensen, N. Aage, and O. Sigmund, "Combined shape and topology optimization of 3D structures," *Computers & Graphics*, vol. 46, pp. 25-35, 2015.
- [143] S. Zhang, A. L. Gain, and J. A. Norato, "Stress-based topology optimization with discrete geometric components," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 325, pp. 1-21, 2017.

- [144] Victoria Burt ; <http://www.altair.com.cn/c2r/ws2016/3d-printed-satellite-component-presents-lesson-rethinking-design.aspx>
- [145] Nicolas Janberg ; <https://structurae.info/ouvrages/pont-grande-duchesse-charlotte/photos>
- [146] Joris Laarman ; <https://www.arch2o.com/bone-chair-joris-laarman/>